Suite II - Die Arithmetische

Teil 3: Essays 109-120

FundamentalSatz $\leq +$. 2. FundamentalSatz $-\cdot$. NullTeilerFreiheit in $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$. Kein allgemeines AssoziativGesetz Multiplikation. Kein AssoziativGesetz Multiplikation in $\mathbb{B}, \mathbb{A}$. AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}$. DistributivGesetze $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. E bildet C in sich ab. DistributivGesetze VZ.

Andreas Unterreiter

25. April 2012

FS$\leq +$: FundamentalSatz $\leq +$.
2.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 08/02/12**

109-1. Falls $x+y \in \mathbb{T}$, dann gilt - unter anderem - $\mathsf{Im}(x+y)=0$, woraus $\mathsf{Im}x, \mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$ folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - b) - c) - d) - e) - i) - f) - g) - h) - j) - k)`:

109-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

`a)` x *Zahl.*

`b)` y *Zahl.*

`c)` $x+y=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`d)` $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`e)` $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`f)` $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`g)` $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`h)` $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`i)` $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)=0$.

`j)` $\mathsf{Im}x=-\mathsf{Im}y$.

`k)` $\mathsf{Im}y=-\mathsf{Im}x$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **109-1**</u>

`1.1:` Aus →) “$x+y \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x+y = \mathsf{Re}(x+y)$.

`1.2:` Aus →) “$x+y \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(x+y) = 0$.

`1.3:` Aus →) “$x+y \in \mathbb{T}$”
folgt via ∈**SZ**: $x+y$ Zahl.

`2.a):` Aus `1.3`“$x+y$ Zahl”
folgt via **96-13**: x Zahl.

`2.b):` Aus `1.3`“$x+y$ Zahl”
folgt via **96-13**: y Zahl.

`2.1:` $x+y \stackrel{1.1}{=} \mathsf{Re}(x+y) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`2.2:` $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Im}(x+y) \stackrel{1.2}{=} 0$.

`3.c):` Aus `2.1`
folgt: $x+y = (\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`3.d):` Aus `2.a)`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.a)`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3.e):` Aus `2.b)`“y Zahl”
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`3.i):` Aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y) = 0$.

`4.f):` Aus `3.c)`“$x+y = (\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$” und
aus →) “$x+y \in \mathbb{T}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **109-1**

...

`4.g)`: Aus `3.i)` “ $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$ ” und
aus `3.1` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **102-8**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`4.h)`: Aus `3.i)` “ $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$ ” und
aus `3.1` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **102-8**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`4.j)`: Aus `3.i)` “ $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$ ” und
aus `3.1` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **102-8**: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}y$.

`4.k)`: Aus `3.i)` “ $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$ ” und
aus `3.1` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **102-8**: $\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}x$.

□

109-2. Falls x *oder* y eine treelle Zahl ist und falls $x + y \in \mathbb{T}$, dann sind x *und* y treelle Zahlen:

109-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x + y \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $\boxed{\dfrac{x \in \mathbb{T}.}{y \in \mathbb{T}.} \quad \textit{oder}}$

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{T}$.

b) $y \in \mathbb{T}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **109-2**

REIM-**Notation**.

1.1: Aus $\rightarrow$) "$x + y \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}y$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "$x + y \in \mathbb{T}$"
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}x$.

...

Beweis **109-2** . . .

`2.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

`4:` $\mathsf{Im}y \stackrel{1.2}{=} -\mathsf{Im}x \stackrel{3}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{Im}y = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `5`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`2.2.Fall` $y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}y = 0$.

`4:` $\mathsf{Im}x \stackrel{1.1}{=} -\mathsf{Im}y \stackrel{3}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`5:` Aus `4`"$\mathsf{Im}x = \ldots = 0$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2.Fall`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$"

`2.a):` Aus `A1`
folgt: $x \in \mathbb{T}$.

`2.b):` Aus `A1`
folgt: $y \in \mathbb{T}$.

$\square$

109-3. Falls $x+y\in\mathbb{S}$, dann gilt - unter anderem - $\mathsf{Re}x, \mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$, woraus ohne viel weiteren Aufwand $x,y\in\mathbb{B}$ folgt. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - k) - i) - j) - l) - m) - f) - d) - e) - a) - b) - g) - h)`:

109-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y\in\mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $x\in\mathbb{B}$.

b) $y\in\mathbb{B}$.

c) $x+y=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

d) $\mathsf{Re}x\in\mathbb{S}$.

e) $\mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$.

f) $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{S}$.

g) "$\mathsf{Re}x\neq+\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}y\neq-\infty$".

h) "$\mathsf{Re}x\neq-\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}y\neq+\infty$".

i) $\mathsf{Im}x\in\mathbb{R}$.

j) $\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}$.

k) $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)=0$.

l) $\mathsf{Im}x=-\mathsf{Im}y$.

m) $\mathsf{Im}y=-\mathsf{Im}x$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **109-3**</u> `abcdefijklm)`

`1:` Aus →) “$x + y \in \mathbb{S}$”
folgt via ∈**SZ**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2.c):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`2.k):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$.

`2.i):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`2.j):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`2.l):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}y$.

`2.m):` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}x$.

`2.1:` Aus `1`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{T})$.

`3.f):` Aus `2.c)`“$x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$” und
aus →) “$x + y \in \mathbb{S}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`3.2:` Aus `2.1`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$
\begin{aligned}
& (\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \\
\vee \quad & (\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \\
\vee \quad & (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \\
\vee \quad & (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}.
\end{aligned}
$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **109-3** `abcdefijklm)`

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

`4.1.2.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})$.

`5:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $(\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5`“$(\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” und
aus `4.1.2.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y = \mathsf{nan}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-21**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$.

`8:` Es gilt `7`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$” .
Es gilt `3.f)`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$” .
Ex falso quodlibet folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

`4.1.3.Fall` $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

`5:` Aus `2.1`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `4.1.3.Fall`“$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$” und
aus `5`“$\mathsf{nan} + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `6`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$”
folgt via **95-21**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$.

`8:` Es gilt `7`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$” .
Es gilt `3.f)`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$” .
Ex falso quodlibet folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

...

Beweis **109-3** `abcdefijklm)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.1.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}).$

`5:` Aus `4.1.4.Fall` "$\mathsf{Re}x = \mathsf{nan} \ldots$" und
aus **97-1** "$\mathsf{nan} + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`6:` Aus `5` "$(\mathsf{Re}x) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus `4.1.4.Fall` "$\ldots \mathsf{Re}y = \mathsf{nan}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}.$

`7:` Aus `6` "$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-21**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}.$

`8:` Es gilt `7` "$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$" .
Es gilt `3.f)` "$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$" .
Ex falso quodlibet folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})\text{”}}$

`5.d):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}.$

`5.e):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}.$

`5.1:` Aus `2.i)` "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}.$

`5.2:` Aus `2.j)` "$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}.$

`6.a):` Aus `5.d)` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$" und
aus `5.1` "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}.$

`6.b):` Aus `5.e)` "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$" und
aus `5.2` "$\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $y \in \mathbb{B}.$

<u>Beweis **109-3**</u> `g)`

`1:` Aus →) “ $x+y \in \mathbb{S}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

`2:` Es gilt: $(\mathsf{Re}x=+\infty) \wedge (\mathsf{Re}y=-\infty)$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(\mathsf{Re}x=+\infty) \wedge (\mathsf{Re}y=-\infty)$.

`3:` Aus `2.1.Fall` “ $\mathsf{Re}x=+\infty\ldots$ ” und
aus **AAVI** “ $(+\infty)+(-\infty)=\mathsf{nan}$ ”
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(-\infty)=\mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3` “ $(\mathsf{Re}x)+(-\infty)=\mathsf{nan}$ ” und
aus `2.1.Fall` “ $\ldots\mathsf{Re}y=-\infty$ ”
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)=\mathsf{nan}$.

`5:` Aus `4` “ $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)=\mathsf{nan}$ ”
folgt via **95-21**: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$.

`6:` Es gilt `5` “ $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \notin \mathbb{S}$ ” .
Es gilt `1` “ $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

`2.2.Fall` $(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

`h)`

`1:` Via **FSA** gilt: $y+x=x+y$.

`2:` Aus `1` “ $y+x=x+y$ ” und
aus →) “ $x+y \in \mathbb{S}$ ”
folgt: $y+x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2` “ $y+x \in \mathbb{S}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $(\mathsf{Re}y \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}x \neq -\infty)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{Re}x \neq -\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$.

□

109-4. Falls x *oder* y eine treelle Zahl ist und falls $x+y \in \mathbb{S}$, dann sind x und y sreelle Zahlen:

109-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x + y \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{T}$. *oder* $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $y \in \mathbb{S}$.

c) "$x \neq +\infty$" *oder* "$y \neq -\infty$".

d) "$x \neq -\infty$" *oder* "$y \neq +\infty$"

RECH-**Notation**.

Beweis **109-4**

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$x + y \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$x + y \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

1.3: Aus $\rightarrow)$ "$x + y \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x \neq -\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$.

1.4: Aus $\rightarrow)$ "$x + y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x + y \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **109-4**</u>

2: Aus 1.4 "$x + y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-2**: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

3.1: Aus 2 "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

3.2: Aus 2 "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

4.a): Aus 3.1 "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus 1.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{S}$.

4.b): Aus 3.2 "$y = \mathsf{Re}y$" und
aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$"
folgt: $y \in \mathbb{S}$.

4.1: Aus 3.1 "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus 1.2 "$(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$"
folgt: $(x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$.

4.2: Aus 3.1 "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus 1.3 "$(\mathsf{Re}x \neq -\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$"
folgt: $(x \neq -\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$.

5.c): Aus 3.2 "$y = \mathsf{Re}y$" und
aus 4.1 "$(x \neq +\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq -\infty)$"
folgt: $(x \neq +\infty) \vee (y \neq -\infty)$.

5.d): Aus 3.2 "$y = \mathsf{Re}y$" und
aus 4.2 "$(x \neq -\infty) \vee (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$"
folgt: $(x \neq -\infty) \vee (y \neq +\infty)$.

$\square$

109-5. Falls $x + y \in \mathbb{R}$, dann gilt $x, y \in \mathbb{C}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - i) - g) - h) - j) - k) - f) - d) - e) - a) - b)`:

109-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x + y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

`a)` $x \in \mathbb{C}$.

`b)` $y \in \mathbb{C}$.

`c)` $x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`d)` $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`e)` $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`f)` $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`g)` $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`h)` $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`i)` $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = 0$.

`j)` $\mathsf{Im}x = -\mathsf{Im}y$.

`k)` $\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}x$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **109-5**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x + y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x + y \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis **109-5**</u>

...

`2.c)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $x+y=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$.

`2.i)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}y)=0$.

`2.g)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}x\in\mathbb{R}$.

`2.h)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}y\in\mathbb{R}$.

`2.j)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}x=-\mathsf{Im}y$.

`2.k)`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}y=-\mathsf{Im}x$.

`2.1`: Aus `1` "$x+y\in\mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y\in\mathbb{S})$.

`3.f)`: Aus `2.c)` "$x+y=(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)$" und
aus →) "$x+y\in\mathbb{R}$"
folgt: $(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R}$.

`3.1`: Aus `2.1` "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{S}\ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$.

`3.2`: Aus `2.1` "$\ldots\mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y\in\mathbb{T}$.

`4.d)`: Aus `3.f)` "$(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R}$",
aus `3.1` "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$" und
aus `3.2` "$\mathsf{Re}y\in\mathbb{T}$"
folgt via **102-1**: $\mathsf{Re}x\in\mathbb{R}$.

`4.e)`: Aus `3.f)` "$(\mathsf{Re}x)+(\mathsf{Re}y)\in\mathbb{R}$",
aus `3.2` "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{T}$" und
aus `3.3` "$\mathsf{Re}y\in\mathbb{T}$"
folgt via **102-1**: $\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **109-5**</u>

...

`5.a)`: Aus `4.d)` “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$” und
aus `2.g)` “$\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $x \in \mathbb{C}$.

`5.b)`: Aus `4.e)` “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$” und
aus `2.h)` “$\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$”
folgt via **101-1**: $y \in \mathbb{C}$.

$\square$

109-6. Falls x *oder* y eine treelle Zahl ist und falls $x + y \in \mathbb{R}$, dann sind x und y reelle Zahlen:

109-6(Satz)

Es gelte:

→) $x + y \in \mathbb{R}$.

→) $x \in \mathbb{T}$. *oder* $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{R}$.

b) $y \in \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **109-6**</u>

`1.1:` Aus →) "$x+y \in \mathbb{R}$"
folgt via **109-5**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus →) "$x+y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x+y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.2`"$x+y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-2**: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `2`"$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`4.a):` Aus `3.1`"$x = \mathsf{Re}x$" und
aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`4.b):` Aus `3.2`"$y = \mathsf{Re}y$" und
aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$"
folgt: $y \in \mathbb{R}$.

$\square$

109-7. Nun wird gezeigt, dass **AAVIIe)** voraussetzungsfrei gültig ist:

109-7(Satz)

Aus "$x < y$" folgt "$0 < y - x$".

`RECH.`**≤-Notation**.

Beweis **109-7** `VS` gleich $x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **AAVII**: $0 < y - x$.

...

Beweis **109-7** `VS` gleich $x < y$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

3: Aus `2.2.Fall`“$x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **97-3**: $(+\infty) - x = +\infty$.

4: Aus `2.2.Fall`“$\ldots y = +\infty$” und
aus 3“$(+\infty) - x = +\infty$”
folgt: $y - x = +\infty$.

5: Aus **107-6**“$0 < +\infty$” und
aus 4“$y - x = +\infty$”
folgt: $0 < y - x$.

`2.3.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

3: Aus `2.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via **97-3**: $y - (-\infty) = +\infty$.

4: Aus `2.3.Fall`“$x = -\infty \ldots$” und
aus 3“$y - (-\infty) = +\infty$”
folgt: $y - x = +\infty$.

5: Aus **107-6**“$0 < +\infty$” und
aus 4“$y - x = +\infty$”
folgt: $0 < y - x$.

`2.4.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

3: Aus **97-4**“$(+\infty) - (-\infty) = +\infty$” und
aus `2.4.Fall`“$x = -\infty \ldots$”
folgt: $(+\infty) - x = +\infty$.

4: Aus `2.4.Fall`“$\ldots y = +\infty$” und
aus 3“$(+\infty) - x = +\infty$”
folgt: $y - x = +\infty$.

5: Aus **107-6**“$0 < +\infty$” und
aus 4“$y - x = +\infty$”
folgt: $0 < y - x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 < y - x$.

□

109-8. Die Folgerungen aus $0 < y - x$ sind verwickelter als jene aus $x < y$. Die Beweis-Reihenfolge ist `g) - l) - e) - f) - h) - k) - m) - d) - o) - a) - b) - n) - c) - i) - j)`:

109-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 < y - x$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $y \in \mathbb{B}$.

c) $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

d) $0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

e) $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

f) $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

g) $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

h) $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

i) "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}x = -\infty$".

j) "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}y = +\infty$".

k) $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

l) $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

m) $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

n) $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) = 0$.

o) $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$.

`REIM.RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **109-8**</u> `abdefghklmno)`

`1:` Aus →) "$0 < y - x$"
folgt via **107-9**: $y - x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $y + (-x) \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $y + (-x) = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x)$.

`3.g):` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

`3.2:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Re}(-x) \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x) \in \mathbb{S}$.

`3.l):` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

`3.4:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}(-x) \in \mathbb{R}$.

`3.5:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Im}y) + \mathsf{Im}(-x) = 0$.

`3.6:` Aus `2`"$y + (-x) \in \mathbb{S}$"
folgt via **109-3**: $\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}(-x)$.

`4.1:` Via **96-27** gilt: $\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$.

`4.2:` Via **96-27** gilt: $\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$.

`4.3:` Via **100-4** gilt: $-(-\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

`4.4:` Aus `3.1`
folgt: $y - x = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x)$.

...

Beweis **109-8** `abdefghklmno)`

...

`5.1:` Aus `4.4`“$y - x = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x)$” und
aus `4.1`“$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$”
folgt: $y - x = (\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x).$

`5.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{Re}(-x) \in \mathbb{S}$” und
aus `4.1`“$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$”
folgt: $-\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}.$

`5.3:` Aus `3.3`“$(\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x) \in \mathbb{S}$” und
aus `4.1`“$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$”
folgt: $(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}.$

`5.4:` Aus `3.4`“$\mathsf{Im}(-x) \in \mathbb{R}$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$”
folgt: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}.$

`5.5:` Aus `3.5`“$(\mathsf{Im}y) + \mathsf{Im}(-x) = 0$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$”
folgt: $(\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) = 0.$

`5.6:` Aus `3.6`“$\mathsf{Im}y = -\mathsf{Im}(-x)$” und
aus `4.2`“$\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$”
folgt: $\mathsf{Im}y = -(-\mathsf{Im}x).$

`6.e):` Aus `5.1`
folgt: $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x).$

`6.f):` Aus `5.2`“$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}.$

`6.h):` Aus `5.3`
folgt: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}.$

`6.k):` Aus `5.4`“$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **100-6**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}.$

`6.m):` Aus `5.5`
folgt: $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0.$

`6.1:` Aus `5.6`“$\mathsf{Im}y = -(-\mathsf{Im}x)$” und
aus `4.3`“$-(-\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$”
folgt: $\mathsf{Im}y = \mathsf{Im}x.$

...

<u>Beweis</u> **109-8** `abdefghklmno)`

...

`7.d):` Aus →) “ $0 < y - x$ ” und
aus `6.e)` “ $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$ ”
folgt: $0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

`7.o):` Aus `6.1` “ $\mathsf{Im}y = \mathsf{Im}x$ ”
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$.

`7.1:` $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -((\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x)) \stackrel{\mathsf{6.m)}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$

`7.2:` Aus `6.k)` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$ ”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`7.3:` Aus `3.l)` “ $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$ ”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$.

`8.a):` Aus `6.f)` “ $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$ ” und
aus `7.2` “ $\mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **101-3**: $x \in \mathbb{B}$.

`8.b):` Aus `3.g)` “ $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$ ” und
aus `7.3` “ $\mathsf{Im}y \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **101-3**: $y \in \mathbb{B}$.

`8.n):` Aus `7.1`
folgt: $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) = 0$.

<u>Beweis **109-8** `c)`</u>

`1.1:` Aus →) “$0 < y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

`1.2:` Aus →) “$0 < y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus →) “$0 < y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

`1.4:` Aus →) “$0 < y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.2` “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.4`
folgt: $(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

`3.1:` Aus `2.1` “$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $-\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `1.3` “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `2.2` “$(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$”,
aus `3.2` “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$” und
aus `3.1` “$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-4**: $(\mathsf{Re}y \neq +\infty) \vee (-\mathsf{Re}x \neq -\infty)$.

`4.2:` Aus `2.2` “$(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$”,
aus `3.2` “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$” und
aus `3.1` “$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-4**: $(\mathsf{Re}y \neq -\infty) \vee (-\mathsf{Re}x \neq +\infty)$.

...

<u>Beweis **109-8**</u> `c)`

...

`5.1:` Aus `1.3`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`5.2:` Aus `2.1`"$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (-\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (-\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)\\
\vee\ &(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})$.

`7:` Aus `6.1.Fall`"$\ldots - \mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$",
aus `6.1.Fall`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1.1`"$0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$"
folgt via **AAVII**: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

...

Beweis **109-8** `c)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)$.

`7.1:` Aus `6.2.Fall`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVII**: $-\infty < \mathsf{Re}y$.

`7.2:` Aus `6.2.Fall`“$\ldots -\mathsf{Re}x = +\infty$”
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`8:` Aus `7.2`“$\mathsf{Re}x = -\infty$” und
aus `7.1`“$-\infty < \mathsf{Re}y$”
folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`6.3.Fall` $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`7:` Aus `6.3.Fall`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $(\mathsf{Re}y) + (-\infty) = -\infty$.

`8:` Aus `7`“$(\mathsf{Re}y) + (-\infty) = -\infty$” und
aus `6.3.Fall`“$\ldots -\mathsf{Re}x = -\infty$”
folgt: $(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) = -\infty$.

`9:` Aus `8`
folgt: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$.

`10:` Aus `1.1`“$0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$” und
aus `9`“$(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$”
folgt: $0 < -\infty$.

`11:` Es gilt `10`“$0 < -\infty$”.
Via **107-15** gilt “$\neg(0 < -\infty)$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

...

<u>Beweis **109-8**</u> `c)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.4.Fall` $(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})$.

`7:` Aus `6.4.Fall`“$\ldots - \mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **100-6**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVII**: $\mathsf{Re}x < +\infty$.

`9:` Aus `8`“$\mathsf{Re}x < +\infty$” und
aus `6.4.Fall`“$\mathsf{Re}y = +\infty \ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`6.5.Fall` $(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)$.

Es gilt `6.5.Fall`“$(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)$” .
Es gilt `4.1`“$(\mathsf{Re}y \neq +\infty) \vee (-\mathsf{Re}x \neq -\infty)$” .
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`6.6.Fall` $(\mathsf{Re}y = +\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)$.

`7.1:` Aus **107-6**“$-\infty < +\infty$” und
aus `6.6.Fall`“$\mathsf{Re}y = +\infty \ldots$”
folgt: $-\infty < \mathsf{Re}y$.

`7.2:` Aus `6.6.Fall`“$\ldots - \mathsf{Re}x = +\infty$”
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`8:` Aus `7.2`“$\mathsf{Re}x = -\infty$” und
aus `7.1`“$-\infty < \mathsf{Re}y$”
folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

...

Beweis **109-8** `c)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.7.Fall` $(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R})$.

`7:` Aus `6.7.Fall`"$\ldots - \mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **97-3**: $(-\infty) - \mathsf{Re}x = -\infty$.

`9:` Aus `6.7.Fall`"$\mathsf{Re}y = -\infty \ldots$" und
aus `8`"$(-\infty) - \mathsf{Re}x = -\infty$"
folgt: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$.

`10:` Aus `1.1`"$0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$" und
aus `9`"$(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$"
folgt: $0 < -\infty$.

`11:` Es gilt `10`"$0 < -\infty$".
Via **107-15** gilt "$\neg(0 < -\infty)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`6.8.Fall` $(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)$.

Es gilt `6.8.Fall`"$(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = +\infty)$".
Es gilt `4.2`"$(\mathsf{Re}y \neq -\infty) \vee (-\mathsf{Re}x \neq +\infty)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

...

Beweis **109-8** `c)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{6.9.Fall}}$ $(\mathsf{Re}y = -\infty) \wedge (-\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`7:` Aus **AAVI** "$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$" und
aus `6.8.Fall` "$\mathsf{Re}y = -\infty \ldots$"
folgt: $(\mathsf{Re}y) + (-\infty) = -\infty$.

`8:` Aus `7` "$(\mathsf{Re}y) + (-\infty) = -\infty$" und
aus `6.8.Fall` "$\ldots - \mathsf{Re}x = -\infty$"
folgt: $(\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) = -\infty$.

`9:` Aus `8`
folgt: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$.

`10:` Aus `1.1` "$0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$" und
aus `9` "$(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = -\infty$"
folgt: $0 < -\infty$.

`11:` Es gilt `10` "$0 < -\infty$".
Via **107-15** gilt "$\neg(0 < -\infty)$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`ij)`

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 < y - x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`2.i):` Aus `1` "$\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$"
folgt via **107-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`2.j):` Aus `1` "$\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$"
folgt via **107-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

$\square$

109-9. Im Fall $x \in \mathbb{T}$ *oder* $y \in \mathbb{T}$ ist via **109-8** die vorliegende Verschärfung von **AAVIIf)** verfügbar:

109-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 < y - x$.

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$. *oder* $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt "$x < y$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-9**

REIM-Notation.

1.1: Aus →) "$0 < y - x$"
folgt via **107-9**: $y - x \in \mathbb{S}$.

1.2: Via **100-6** gilt: $(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{T})$.

1.3: Aus →) "$0 < y - x$"
folgt via **109-8**: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

2.1: Aus 1.1 "$y - x \in \mathbb{S}$"
folgt via ∈**SZ**: $y - x \in \mathbb{T}$.

2.2: Aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$" und
aus 1.2 "$(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{T})$"
folgt: $(-x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$.

3.1: Aus 2.1
folgt: $y + (-x) \in \mathbb{T}$.

3.2: Aus 2.2
folgt: $(y \in \mathbb{T}) \vee (-x \in \mathbb{T})$.

4: Aus 3.1 "$y + (-x) \in \mathbb{T}$" und
aus 3.2 "$(y \in \mathbb{T}) \vee (-x \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-2**: $(y \in \mathbb{T}) \wedge (-x \in \mathbb{T})$.

5: Aus 4 "$\ldots - x \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{T}$.

6.1: Aus 5 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

6.2: Aus 4 "$y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

7: Aus 6.1 "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus 1.3 "$\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$"
folgt: $x < \mathsf{Re}y$.

8: Aus 7 "$x < \mathsf{Re}y$" und
aus 6.2 "$y = \mathsf{Re}y$"
folgt: $x < y$.

□

109-10. Falls $x \leq y$, dann folgt wegen der Möglichkeiten $x = y = \pm\infty$ nicht unbedingt $0 \leq y - x$.

109-10(Satz)

Aus "$x \leq y$" folgt "$x = y = +\infty$" oder "$x = y = -\infty$" oder "$0 \leq y - x$".

`RECH.`**$\leq$-Notation**.

Beweis **109-10**

1: Aus →) "$x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < y$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x < y$"
folgt via **109-7**: $0 < y - x$.

3: Aus 2 "$0 < y - x$"
folgt via **41-3**: $0 \leq y - x$.

4: Aus 3
folgt: $(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x)$.

...

Beweis **109-10**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = y$.

2: Aus →) "$x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2 "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

4: Aus `3.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

5: Aus 4 "$x \in \mathbb{C}$" und
aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt via **102-7**: $x - y = 0$.

6: $y - x \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -(x - y) \stackrel{5}{=} -0 \stackrel{\textbf{98-15}}{=} 0$.

7: Aus **107-6** "$0 \leq 0$" und
aus 6 "$y - x = \ldots = 0$"
folgt: $0 \leq y - x$.

8: Aus 7
folgt: $(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x)$.

...

...

Beweis **109-10**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = y$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $x = +\infty$.

`4:` Aus `3.2.Fall` "$x = +\infty$" und
aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt: $y = +\infty$.

`5:` Aus `3.2.Fall` "$x = +\infty$" und
aus `4` "$y = +\infty$"
folgt: $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x)$.

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $x = -\infty$.

`4:` Aus `3.3.Fall` "$x = -\infty$" und
aus `1.2.Fall` "$x = y$"
folgt: $y = -\infty$.

`5:` Aus `3.3.Fall` "$x = -\infty$" und
aus `4` "$y = -\infty$"
folgt: $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x).$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:

$$(x = y = +\infty) \vee (x = y = -\infty) \vee (0 \leq y - x).$$

□

109-11. Falls $x \leq y$ *und* x oder y ist reell, dann $0 \leq y - x$:

109-11(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \leq y$.

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$. *oder* $y \in \mathbb{R}$.

Dann folgt "$0 \leq y - x$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-11**

`1:` Aus →) "$x \le y$"
folgt via **109-10**: $((x = +\infty) \wedge (y = +\infty)) \vee ((x = -\infty) \wedge (y = -\infty))$
$\vee(0 \le y - x)$.

`2:` Nach "→) *oder*" gilt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (y \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)$.

`4:` Aus `3` "$(x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)$" und
aus `1` "$((x = +\infty) \wedge (y = +\infty)) \vee ((x = -\infty) \wedge (y = -\infty))$
$\vee(0 \le y - x)$"
folgt: $0 \le y - x$.

`2.2.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-17**: $(y \neq +\infty) \wedge (y \neq -\infty)$.

`4:` Aus `3` "$(x \neq +\infty) \wedge (x \neq -\infty)$" und
aus `1` "$((x = +\infty) \wedge (y = +\infty)) \vee ((x = -\infty) \wedge (y = -\infty))$
$\vee(0 \le y - x)$"
folgt: $0 \le y - x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \le y - x$.

□

109-12. Nun wird das Analogon zu **109-8** für "KleinerGleich" an Stelle von "Kleiner" etabliert. Der Beweis zieht sich etwas:

109-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \leq y - x$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{B}$.

b) $y \in \mathbb{B}$.

c) $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

d) $0 \leq (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

e) $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

f) $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

g) $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

h) $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) \in \mathbb{S}$.

i) "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}x = -\infty$".

j) "$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}y = +\infty$".

k) $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

l) $\mathsf{Im}y \in \mathbb{R}$.

m) $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

n) $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) = 0$.

o) $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$.

REIM.RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-12** `ab)`

`1.1:` Aus →) “$0 \le y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.1.Fall` “$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`1.1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall` “$0 = y - x$”
folgt: $y - x = 0$.

`3:` Aus `2` “$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (x \in \mathbb{C})$.

`4.1:` Aus `3` “$y \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{B}$.

`4.2:` Aus `3` “$\ldots x \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{B}$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `4.1`
folgt: $(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$(x \in \mathbb{B}) \wedge (y \in \mathbb{B})$”

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $x \in \mathbb{B}$.

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $y \in \mathbb{B}$.

Beweis **109-12** `c)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` “$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$.

`3:` Aus `2` “$\mathsf{Re}x < \mathsf{Re}y$”
folgt via **41-3**: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $y - x = 0$.

`3:` Aus `2` “$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $(x \in \mathbb{C}) \wedge (y = x)$.

`4.1:` Aus `3` “$x \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `3` “$\ldots y = x$”
folgt: $\mathsf{Re}y = \mathsf{Re}x$.

`5:` Aus `4.1` “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5` “$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}x$.

`7:` Aus `6` “$\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}x$” und
aus `4.2` “$\mathsf{Re}y = \mathsf{Re}x$”
folgt: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

Beweis **109-12** d)

1: Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $0 < y - x$.

2: Aus 1.1.Fall “$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

3: Aus 2 “$0 < (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$”
folgt via **41-3**: $0 \leq (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

1.2.Fall $0 = y - x$.

2: Aus 1.2.Fall
folgt: $y - x = 0$.

3: Aus 2 “$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $(y \in \mathbb{C}) \wedge (y = x)$.

4.1: Aus 3 “$y \in \mathbb{C} \ldots$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

4.2: Aus 3 “$\ldots y = x$”
folgt: $\mathsf{Re}y = \mathsf{Re}x$.

5: Aus 4.1 “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{C}$.

6: Aus 5.1 “$\mathsf{Re}y \in \mathbb{C}$” und
aus 4.2 “$\mathsf{Re}y = \mathsf{Re}x$”
folgt via **102-7**: $(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = 0$.

7: Aus **107-6** “$0 \leq 0$” und
aus 6 “$(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x) = 0$”
folgt: $0 \leq (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $0 \leq (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

Beweis **109-12** `e)`

`1:` Aus →) "$0 \leq y - x$"
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.Fall` "$0 < y - x$"
folgt via **109-8**: $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:`

$$\begin{aligned} & y - x \\ \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=}\ & 0 \\ \stackrel{\textbf{AAIII}}{=}\ & \mathsf{Re}0 \\ \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=}\ & \mathsf{Re}(y - x) \\ =\ & \mathsf{Re}(y + (-x)) \\ \stackrel{\textbf{96-25}}{=}\ & (\mathsf{Re}y) + \mathsf{Re}(-x) \\ \stackrel{\textbf{96-27}}{=}\ & (\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Re}x) \\ =\ & (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x). \end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y - x = (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Re}x)$.

Beweis **109-12** `fg)`

`1.1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \in \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y \in \mathbb{B}$.

`2.f):` Aus `1.1`“$x \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$.

`2.g):` Aus `1.2`“$y \in \mathbb{B}$”
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$.

`h)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $0 \leq (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}y)$.

`2:` Aus `1`“$0 \leq (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}y)$”
folgt via **107-3**: $(\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{S}$.

`i)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.Fall`“$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $y - x = 0$.

`3:` Aus `2`“$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

Beweis **109-12** j)

1: Aus →) "$0 \leq y - x$"
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $0 < y - x$.

Aus 1.1.Fall "$0 < y - x$"
folgt via **109-8**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

1.2.Fall $0 = y - x$.

2: Aus 1.2.Fall
folgt: $y - x = 0$.

3: Aus 2 "$y - x = 0$"
folgt via **102-7**: $y \in \mathbb{C}$.

4: Aus 3 "$y \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

5: Aus 4
folgt: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

Beweis **109-12** `k)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.Fall`“$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $y - x = 0$.

`3:` Aus 2“$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $x \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus 3“$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **109-12**</u> `1)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.Fall`“$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $\mathsf{Im} y \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $y - x = 0$.

`3:` Aus 2“$y - x = 0$”
folgt via **102-7**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus 3“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Im} y \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im} y \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **109-12**</u> `m)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via **41-5**: $(0 < y - x) \vee (0 = y - x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y - x$.

Aus `1.1.Fall` “$0 < y - x$”
folgt via **109-8**: $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

`1.2.Fall` $0 = y - x$.

`2:` $$0 \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} \mathsf{Im}0 \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \mathsf{Im}(y - x) = \mathsf{Im}(y + (-x)) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}(-x)) \stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) = (\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x).$$

`3:` Aus 2 “$0 = \ldots = (\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

`no)`

`1:` Aus →) “$0 \leq y - x$”
folgt via des bereits bewiesenen `m)`: $(\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x) = 0$.

`2:` $$(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -((\mathsf{Im}y) - (\mathsf{Im}x)) \stackrel{1}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0.$$

`3.n):` Aus 2
folgt: $(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) = 0$.

`4.o):` Aus `3.n)` “$(\mathsf{Im}x) - (\mathsf{Im}y) = 0$”
folgt via **102-7**: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$.

□

109-13. Via **109-12** ist eine “Kleiner-Gleich-Version” von **109-9** verfügbar:

109-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $0 \le y - x$.

$\rightarrow)$ $\boxed{\dfrac{x \in \mathbb{T}.}{y \in \mathbb{T}.} \quad \textit{oder}}$

Dann folgt “$x \le y$”.

RECH.**≤-Notation**.

Beweis **109-13**

`REIM`-**Notation**.

`1.1:` Aus →) "$0 \leq y - x$"
folgt via **107-3**: $y - x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Via **100-6** gilt: $(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{T})$.

`1.3:` Aus →) "$0 \leq y - x$"
folgt via **109-12**: $\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$.

`2.1:` Aus `1.1` "$y - x \in \mathbb{S}$"
folgt via ∈**SZ**: $y - x \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$" und
aus `1.2` "$(x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{T})$"
folgt: $(-x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $y + (-x) \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2.2`
folgt: $(y \in \mathbb{T}) \vee (-x \in \mathbb{T})$.

`4:` Aus `3.1` "$y + (-x) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2` "$(y \in \mathbb{T}) \vee (-x \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-2**: $(y \in \mathbb{T}) \wedge (-x \in \mathbb{T})$.

`5:` Aus `4` "$\ldots - x \in \mathbb{T}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{T}$.

`6.1:` Aus `5` "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`6.2:` Aus `4` "$y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`7:` Aus `6.1` "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus `1.3` "$\mathsf{Re}x \leq \mathsf{Re}y$"
folgt: $x \leq \mathsf{Re}y$.

`8:` Aus `7` "$x \leq \mathsf{Re}y$" und
aus `6.2` "$y = \mathsf{Re}y$"
folgt: $x \leq y$.

□

109-14. Es gilt $x < y$ genau dann, wenn $-y < -x$:

109-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x < y$.

`ii)` $-y < -x$.

`RECH.`$\leq$**-Notation**.

Beweis **109-14** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty). \end{array}$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **109-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x < y$.

...

`Fallunterscheidung`

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **AAVII**: $0 < y - x$.

`4:` Via **FS**$+-$ gilt: $y - x = -x - (-y)$.

`5:` Aus `3`"$0 < y - x$" und
aus `4`"$y - x = -x - (-y)$"
folgt: $0 < -x - (-y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $0 < (-x) - (-y)$.

`7.1:` Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{R}$.

`7.2:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-y \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7.1`"$-x \in \mathbb{R}$",
aus `7.2`"$-y \in \mathbb{R}$" und
aus `6`"$0 < (-x) - (-y)$"
folgt via **AAVII**: $-y < -x$.

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt via **100-13**: $-y = -\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$-x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < -x$.

`5:` Aus `3.2`"$-y = -\infty$" und
aus `4`"$-\infty < -x$"
folgt: $-y < -x$.

...

<u>Beweis **109-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x < y$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-y \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`"$x = -\infty \ldots$"
folgt via **100-13**: $-x = +\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$-y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-y < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$-y < +\infty$" und
aus `3.2`"$-x = +\infty$"
folgt: $-y < -x$.

`2.4.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`"$x = -\infty \ldots$"
folgt via **100-13**: $-x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt via **100-13**: $-y = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$-y = -\infty$" und
aus **107-6**"$-\infty < +\infty$"
folgt: $-y < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$-y < +\infty$" und
aus `3.1`"$-x = +\infty$"
folgt: $-y < -x$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $-y < -x$.

Beweis **109-14** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-y < -x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$-y < -x$" folgt via **107-9**: $(-y \in \mathbb{R}) \vee (-y = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$-y < -x$" folgt via **107-9**: $(-x \in \mathbb{R}) \vee (-x = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt:

$$\begin{aligned} & (-y \in \mathbb{R}) \wedge (-x \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (-y \in \mathbb{R}) \wedge (-x = +\infty) \\ \vee\quad & (-y = -\infty) \wedge (-x \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (-y = -\infty) \wedge (-x = +\infty). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(-y \in \mathbb{R}) \wedge (-x \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$-y \in \mathbb{R} \ldots$", aus `2.1.Fall`"$\ldots -x \in \mathbb{R}$" und aus `VS` gleich "$-y < -x$" folgt via **AAVII**: $0 < (-x) - (-y)$.

`4:` Aus `3` folgt: $0 < -x - (-y)$.

`5:` Via **FS**$+-$ gilt: $-x - (-y) = y - x$.

`6:` Aus `4`"$0 < -x - (-y)$" und aus `5`"$-x - (-y) = y - x$" folgt: $0 < y - x$.

`7.1:` Aus `2.1.Fall`"$-y \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **100-6**: $y \in \mathbb{R}$.

`7.2:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots -x \in \mathbb{R}$" folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus `7.2`"$x \in \mathbb{R}$", aus `7.1`"$y \in \mathbb{R}$" und aus `6`"$0 < y - x$" folgt via **AAVII**: $x < y$.

...

<u>Beweis **109-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-y < -x$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(-y \in \mathbb{R}) \wedge (-x = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$-y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $y \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots - x = +\infty$"
folgt via **100-13**: $x = -\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $-\infty < y$.

`5:` Aus `3.2`"$x = -\infty$" und
aus `4`"$-\infty < y$"
folgt: $x < y$.

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(-y = -\infty) \wedge (-x \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots - x \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $x \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`"$-y = -\infty \ldots$"
folgt via **100-13**: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVII**: $x < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$x < +\infty$" und
aus `3.2`"$y = +\infty$"
folgt: $x < y$.

...

<u>Beweis **109-14**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-y < -x.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(-y = -\infty) \wedge (-x = +\infty).$

`3.1:` Aus `2.4.Fall`“$-y = -\infty\ldots$”
folgt via **100-13**: $y = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.4.Fall`“$\ldots -x = +\infty$”
folgt via **100-13**: $x = -\infty.$

`4:` Aus `3.2`“$x = -\infty$” und
aus **107-6**“$-\infty < +\infty$”
folgt: $x < +\infty.$

`5:` Aus `4`“$x < +\infty$” und
aus `3.1`“$y = +\infty$”
folgt: $x < y.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x < y.$

$\square$

109-15. Es gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $-y \leq -x$:

109-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \leq y$.

`ii)` $-y \leq -x$.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \leq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < y$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$x < y$"
folgt via **109-14**: $-y < -x$.

`4:` Aus `3`"$-y < -x$"
folgt via **41-3**: $-y \leq -x$.

`2.2.Fall` $x = y$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$x = y$"
folgt: $-x = -y$.

`4:` Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{S}$.

`5:` Aus `4`"$-x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-x \leq -x$.

`6:` Aus `3`"$-x = -y$" und
aus `5`"$-x \leq -x$"
folgt: $-y \leq -x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-y \leq -x$.

Beweis **109-15** $\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $-y \leq -x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$-y \leq -x$"
folgt via **107-3**: $-y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$-y \leq -x$"
folgt via **41-5**: $(-y < -x) \vee (-y = -x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $-y < -x$.

`3:` Aus `2.1.Fall` "$-y < -x$"
folgt via **109-14**: $x < y$.

`4:` Aus `3` "$x < y$"
folgt via **41-3**: $x \leq y$.

`2.2.Fall` $-y = -x$.

`3:` Aus `1` "$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $y \in \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus `3` "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4.2:` Aus `3` "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`5:` Aus `2.2.Fall` "$-y = -x$" und
aus `4.1` "y Zahl"
folgt via **100-11**: $y = x$.

`6:` Aus `5` "$y = x$" und
aus `4.2` "$y \leq y$"
folgt: $x \leq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq y$.

□

109-16. Via $-0 = 0$ ergeben sich aus **109-14,15** die vorliegenden Kriterien:

109-16(Satz)

a) *"$0 \le x$" genau dann, wenn "$-x \le 0$".*

b) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$-x < 0$".*

c) *"$0 \le -x$" genau dann, wenn "$x \le 0$".*

d) *"$0 < -x$" genau dann, wenn "$x < 0$".*

RECH.$\le$-**Notation**.

Beweis **109-16** a)

1: Via **109-15** gilt: $(0 \le x) \Leftrightarrow (-x \le -0)$.

2: Aus 1"$(0 \le x) \Leftrightarrow (-x \le -0)$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $(0 \le x) \Leftrightarrow (-x \le 0)$.

b)

1: Via **109-14** gilt: $(0 < x) \Leftrightarrow (-x < -0)$.

2: Aus 1"$(0 < x) \Leftrightarrow (-x < -0)$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $(0 < x) \Leftrightarrow (-x < 0)$.

c)

1: Via **109-15** gilt: $(-0 \le -x) \Leftrightarrow (x \le 0)$.

2: Aus 1"$(-0 \le -x) \Leftrightarrow (x \le 0)$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $(0 \le -x) \Leftrightarrow (x \le 0)$.

d)

1: Via **109-14** gilt: $(-0 < -x) \Leftrightarrow (x < 0)$.

2: Aus 1"$(-0 < -x) \Leftrightarrow (x < 0)$" und
aus **98-15**"$-0 = 0$"
folgt: $(0 < -x) \Leftrightarrow (x < 0)$.

$\square$

109-17. Aus **109-15** ergibt sich ein Kriterium für $x = y$, sofern x oder y in $\mathbb{S}$ sind:

109-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x = y$" und "$x \in \mathbb{S}$".*

`ii)` *"$x = y$" und "$y \in \mathbb{S}$".*

`iii)` *"$x \le y$" und "$-x \le -y$".*

`iv)` *"$y \le x$" und "$-y \le -x$".*

`RECH.`$\le$-**Notation**.

Beweis **109-17** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x = y) \wedge (x \in \mathbb{S})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{S}$"
folgt: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$" und
aus `1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt: $(x = y) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

<u>Beweis **109-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x = y) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$"
folgt: $-x = -y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **100-6**: $-y \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x = y \ldots$" und
aus `1.3`"$y \leq y$"
folgt: $x \leq y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$-y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $-y \leq -y$.

`3:` Aus `1.1`"$-x = -y$" und
aus `2.2`"$-y \leq -y$"
folgt: $-x \leq -y$.

`4:` Aus `2.1`"$x \leq y$" und
aus `3`"$-x \leq -y$"
folgt: $(x \leq y) \wedge (-x \leq -y)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(x \leq y) \wedge (-x \leq -y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq y \ldots$"
folgt via **109-15**: $-y \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots -x \leq -y$"
folgt via **109-15**: $y \leq x$.

`2:` Aus `1.2`"$y \leq x$" und
aus `1.1`"$-y \leq -x$"
folgt: $(y \leq x) \wedge (-y \leq -x)$.

<u>Beweis **109-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(y \le x) \wedge (-y \le -x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \le x \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots - y \le -x$"
folgt via **109-15**: $x \le y$.

`2:` Aus `1.2`"$x \le y$" und
aus `VS` gleich "$y \le x \ldots$"
folgt via **107-13**: $x = y$.

`3:` Aus `2`"$x = y$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt: $(x = y) \wedge (x \in \mathbb{S})$.

□

109-18. Da 0 ein Element von $\mathbb{S}$ ist, ergibt sich aus **109-17** via $-0 = 0$ das nunmehrige Kriterium für $x = 0$:

109-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 0$.

`ii)` "$0 \le x$" *und* "$0 \le -x$".

`iii)` "$x \le 0$" *und* "$-x \le 0$".

`RECH.`$\le$-**Notation**.

<u>Beweis **109-18**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 0.$

`1:` Via **95-11** gilt: $0 \in \mathbb{S}.$

`2:` Aus `VS` gleich “$x = 0$” und
aus `1` “$0 \in \mathbb{S}$”
folgt via **109-17**: $(0 \leq x) \wedge (-0 \leq -x).$

`3:` Aus **98-15** “$-0 = 0$” und
aus `2` “$(0 \leq x) \wedge (-0 \leq -x)$”
folgt: $(0 \leq x) \wedge (0 \leq -x).$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq -x).$

`1:` Aus **98-15** “$-0 = 0$” und
aus `VS` gleich “$\ldots 0 \leq -x$”
folgt: $-0 \leq -x.$

`2:` Aus `VS` gleich “$0 \leq x \ldots$” und
aus `1` “$-0 \leq -x$”
folgt via **109-17**: $(x \leq 0) \wedge (-x \leq -0).$

`3:` Aus `2` “$(x \leq 0) \wedge (-x \leq -0)$” und
aus **98-15** “$-0 = 0$”
folgt: $(x \leq 0) \wedge (-x \leq 0).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (-x \leq 0).$

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots - x \leq 0$” und
aus **98-15** “$-0 = 0$”
folgt: $-x \leq -0.$

`2:` Aus `VS` gleich “$x \leq 0 \ldots$” und
aus `1` “$-x \leq -0$”
folgt via **109-17**: $x = 0.$

□

109-19. Die Summe zweier Zahlen≥ 0 ist ≥ 0 und positiv, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen positiv ist:

109-19(Satz) (FS$\leq +$: FundamentalSatz $\leq +$)

a) *Aus* “$0 < x$” *und* “$0 < y$” *folgt* “$0 < x + y$”.

b) *Aus* “$0 \leq x$” *und* “$0 < y$” *folgt* “$0 < x + y$”.

c) *Aus* “$0 < x$” *und* “$0 \leq y$” *folgt* “$0 < x + y$”.

d) *Aus* “$0 \leq x$” *und* “$0 \leq y$” *folgt* “$0 \leq x + y$”.

RECH.$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **109-19**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 < x$”
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`1.2:` Aus →) “$0 < y$”
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee \quad & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \\ \vee \quad & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\ \vee \quad & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$0 < y$”
folgt via **109-16**: $-y < 0$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4.1:` Aus `3.1`“$-y < 0$” und
aus `VS` gleich “$0 < x \ldots$”
folgt via **107-8**: $-y < x$.

`4.2:` Aus `3.2`“y Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-y) = y$.

`5:` Aus `4.1`“$-y < x$”
folgt via **109-7**: $0 < x - (-y)$.

`6:` Via **FS**$-+$ gilt: $x - (-y) = x + y$.

`7:` Aus `5`“$0 < x - (-y)$” und
aus `6`“$x - (-y) = x + y$”
folgt: $0 < x + y$.

...

<u>Beweis **109-19**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Via **107-6** gilt: $0 < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$0 < +\infty$" und
aus `3`"$x + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $0 < x + (+\infty)$.

`6:` Aus `5`"$0 < x + (+\infty)$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $0 < x + y$.

`2.3.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + y = +\infty$.

`4:` Via **107-6** gilt: $0 < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$0 < +\infty$" und
aus `3`"$(+\infty) + y = +\infty$"
folgt: $0 < (+\infty) + y$.

`6:` Aus `5`"$0 < (+\infty) + y$" und
aus `2.3.Fall`"$x = +\infty \ldots$"
folgt: $0 < x + y$.

...

Beweis **109-19** `a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty)$.

`3:` Via **AAVI** gilt: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Via **107-6** gilt: $0 < +\infty$.

`5:` Aus `4`"$0 < +\infty$" und
aus `3`"$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $0 < (+\infty) + (+\infty)$.

`6:` Aus `5`"$0 < (+\infty) + (+\infty)$" und
aus `2.4.Fall`"$x = +\infty \ldots$"
folgt: $0 < x + (+\infty)$.

`7:` Aus `6`"$0 < x + (+\infty)$" und
aus `2.4.Fall`"$\ldots y = +\infty$"
folgt: $0 < x + y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 < x + y$.

<u>Beweis **109-19**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < x$.

Aus `1.1.Fall` "$0 < x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x + y$.

`1.2.Fall` $0 = x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2` "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3` "y Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + y = y$.

`5:` Aus `4` "$0 + y = y$" und
aus `1.2.Fall` "$0 = x$"
folgt: $x + y = y$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$" und
aus `5` "$x + y = y$"
folgt: $0 < x + y$.

In beiden Fällen gilt: $0 < x + y$.

`c)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 \le y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y$" und
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 < y + x$.

`2:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`3:` Aus `1` "$0 < y + x$" und
aus `2` "$y + x = x + y$"
folgt: $0 < x + y$.

<u>Beweis **109-19**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **41-5**: $(0 < y) \vee (0 = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$" und
aus `1.1.Fall`"$0 < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 < x + y$.

`3:` Aus `2`"$0 < x + y$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x + y$.

`1.2.Fall` $0 = y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl"
folgt via **FSA**0: $x + 0 = x$.

`5:` Aus `4`"$x + 0 = x$" und
aus `1.2.Fall`"$0 = y$"
folgt: $x + y = x$.

`6:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$" und
aus `5`"$x + y = x$"
folgt: $0 \leq x + y$.

In beiden Fällen gilt: $0 \leq x + y$.

$\square$

109-20. Ist die Summe zweier Zahlen≥ 0 positiv, dann ist wenigstens eine dieser beiden Zahlen positiv. Ist die Summer zweier Zahlen ≥ 0 gleich 0, dann sind beide Zahlen$= 0$:

109-20(Satz)

a) *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$0 \leq y$" *und* "$0 < x+y$" *folgt* "$(0 < x) \vee (0 < y)$".

b) *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$0 \leq y$" *und* "$x+y = 0$" *folgt* "$(x = 0) \wedge (y = 0)$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-20** `a)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (0 < x+y)$.

`1:` Es gilt: $(0 < x) \vee (0 < y)$
$\vee \quad (\neg(0 < x)) \wedge (\neg(0 < y))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(0 < x) \vee (0 < y)$.

`1.2.Fall` $(\neg(0 < x)) \wedge (\neg(0 < y))$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < y) \vee (0 = y)$.

`3.1:` Aus `2.1`"$(0 < x) \vee (0 = x)$" und
aus `1.2.Fall`"$\neg(0 < x) \ldots$"
folgt: $0 = x$.

`3.2:` Aus `2.2`"$(0 < y) \vee (0 = y)$" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots \neg(0 < y)$"
folgt: $0 = y$.

`4:` $0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{3.1}{=} x + 0 \stackrel{3.2}{=} x + y$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < x + y$" und
aus `4`"$0 = \ldots = x + y$"
folgt: $0 < 0$.

`6:` Es gilt `5`"$0 < 0$".
Via **41-5** gilt "$\neg(0 < 0)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(0 < x) \vee (0 < y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(0 < x) \vee (0 < y)$.

Beweis **109-20** `b)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (x + y = 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < y) \vee (0 = y)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (0 < x) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 < x) \wedge (0 = y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (0 = y). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`3:` Aus `2.1.Fall`"$0 < x \ldots$" und
aus `2.1.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **FS**$\le +$: $0 < x + y$.

`4:` Aus `3`"$0 < x + y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x + y = 0$"
folgt: $0 < 0$.

`5:` Es gilt `4`"$0 < 0$".
Via **41-5** gilt "$\neg(0 < 0)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

`2.2.Fall` $(0 < x) \wedge (0 = y)$.

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le y \ldots$"
folgt via **FS**$\le +$: $0 < x + y$.

`4:` Aus `3`"$0 < x + y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x + y = 0$"
folgt: $0 < 0$.

`5:` Es gilt `4`"$0 < 0$".
Via **41-5** gilt "$\neg(0 < 0)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

...

<u>Beweis **109-20**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (x + y = 0).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(0 = x) \wedge (0 < y).$

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$" und
aus `2.3.Fall` "$\ldots 0 < y \ldots$"
folgt via **FS**$\le +$: $0 < x + y.$

`4:` Aus `3` "$0 < x + y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x + y = 0$"
folgt: $0 < 0.$

`5:` Es gilt `4` "$0 < 0$".
Via **41-5** gilt "$\neg(0 < 0)$".
Ex falso quodlibet folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0).$

`2.4.Fall` $(0 = x) \wedge (0 = y).$

Aus `2.4.Fall`
folgt: $(x = 0) \wedge (y = 0).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x = 0) \wedge (y = 0).$

□

109-21. Die Summe zweier Zahlen≤ 0 ist ≤ 0 und negativ, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen negativ ist:

<u>**109-21(Satz)**</u>

a) *Aus* "$x < 0$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$x + y < 0$".

b) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$x + y < 0$".

c) *Aus* "$x < 0$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$x + y < 0$".

d) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$x + y \leq 0$".

<u>RECH.$\leq$-**Notation**</u>.

<u>Beweis **109-21**</u> a) VS gleich $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

1.1: Aus VS gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

2: Aus 1.1"$0 < -x$" und
aus 1.2"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < (-x) + (-y)$.

3: $(-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} -(x + y)$.

4: Aus 2"$0 < (-x) + (-y)$" und
aus 3"$(-x) + (-y) = \ldots = -(x + y)$"
folgt: $0 < -(x + y)$.

5: Aus 4"$0 < -(x + y)$"
folgt via **109-16**: $x + y < 0$.

<u>Beweis **109-21**</u> `b)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y < 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$" und
aus `1.2`"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < (-x) + (-y)$.

`3:` $(-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y \overset{\textbf{FS}-+}{=} -(x + y)$.

`4:` Aus `2`"$0 < (-x) + (-y)$" und
aus `3`"$(-x) + (-y) = \ldots = -(x + y)$"
folgt: $0 < -(x + y)$.

`5:` Aus `4`"$0 < -(x + y)$"
folgt via **109-16**: $x + y < 0$.

`c)` `VS` gleich $(x < 0) \wedge (y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 < -x$" und
aus `1.2`"$0 \leq -y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < (-x) + (-y)$.

`3:` $(-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y \overset{\textbf{FS}-+}{=} -(x + y)$.

`4:` Aus `2`"$0 < (-x) + (-y)$" und
aus `3`"$(-x) + (-y) = \ldots = -(x + y)$"
folgt: $0 < -(x + y)$.

`5:` Aus `4`"$0 < -(x + y)$"
folgt via **109-16**: $x + y < 0$.

<u>Beweis **109-21**</u> `d)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$" und
aus `1.2`"$0 \leq -y$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 \leq (-x) + (-y)$.

`3:` $(-x) + (-y) = (-x) - y = -x - y \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(x + y)$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (-x) + (-y)$" und
aus `3`"$(-x) + (-y) = \ldots = -(x + y)$"
folgt: $0 \leq -(x + y)$.

`5:` Aus `4`"$0 \leq -(x + y)$"
folgt via **109-16**: $x + y \leq 0$.

□

109-22. Ist die Summe zweier Zahlen≤ 0 negativ, dann ist wenigstens eine dieser beiden Zahlen negativ. Ist die Summer zweier Zahlen ≤ 0 gleich 0, dann sind beide Zahlen$= 0$:

109-22(Satz)

a) *Aus "$x \leq 0$" und "$y \leq 0$" und "$x+y < 0$" folgt "$(x<0)\vee(y<0)$".*

b) *Aus "$x \leq 0$" und "$y \leq 0$" und "$x+y = 0$" folgt "$(x=0)\wedge(y=0)$".*

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-22** `a)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \wedge (x+y<0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x+y<0$"
folgt via **109-16**: $0 < -(x+y)$.

`2:` $-(x+y) \overset{\textbf{FS}-+}{=} -x-y = (-x)-y = (-x)+(-y)$.

`3:` Aus `1.3`"$0 < -(x+y)$" und
aus `2`"$-(x+y) = \ldots = (-x)+(-y)$"
folgt: $0 < (-x)+(-y)$.

`4:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$",
aus `1.2`"$0 \leq -y$" und
aus `3`"$0 < (-x)+(-y)$"
folgt via **109-20**: $(0 < -x) \vee (0 < -y)$.

`5:` Via **109-16** gilt: $(0 < -x) \Leftrightarrow (x < 0)$.

`6:` Aus `4`"$(0 < -x) \vee (0 < -y)$" und
aus `5`"$(0 < -x) \Leftrightarrow (x < 0)$"
folgt: $(x<0) \vee (0 < -y)$.

`6:` Via **109-16** gilt: $(0 < -y) \Leftrightarrow (y < 0)$.

`7:` Aus `6`"$(x<0) \vee (0 < -y)$" und
aus `6`"$(0 < -y) \Leftrightarrow (y < 0)$"
folgt: $(x<0) \vee (y<0)$.

<u>Beweis **109-22**</u> `b)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \wedge (x+y=0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`1.3:` Aus `VS`
folgt: $x+y=0$.

`2:` $(-x)+(-y) = (-x)-y = -x-y \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(x+y) \stackrel{1.3}{=} -0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0$.

`3:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$",
aus `1.2`"$0 \leq -y$" und
aus `2`"$(-x)+(-y) = \ldots = 0$"
folgt via **109-20**: $(-x=0) \wedge (-y=0)$.

`4.1:` Aus `3`"$-x=0\ldots$"
folgt via **100-13**: $x=0$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots -y=0$"
folgt via **100-13**: $y=0$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $(x=0) \wedge (y=0)$.

□

109-23. Wird zu einer Zahl≥ 0 die Zahl $+\infty$ addiert, ergibt sich $+\infty$. Wird zu einer Zahl≤ 0 die Zahl $-\infty$ addiert, ergibt sich $-\infty$:

109-23(Satz)

a) *Aus "$0 \leq x$" folgt "$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$".*

b) *Aus "$x \leq 0$" folgt "$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$".*

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-23** a) VS gleich $0 \leq x$.

1: Aus VS gleich "$0 \leq x$"
folgt via **107-17**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \in \mathbb{R}$.

Aus 1.1.Fall"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

1.2.Fall $x = +\infty$.

2: Via **AAVI** gilt: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

3.1: Aus 1.2.Fall"$x = +\infty$" und
aus 2"$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $x + (+\infty) = +\infty$.

3.2: Aus 2"$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$" und
aus 1.2.Fall"$x = +\infty$"
folgt: $(+\infty) + x = +\infty$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$.

<u>Beweis **109-23**</u> `b)` `VS` gleich $x \leq 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0$"
folgt via **107-17**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}.$

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$

`1.2.Fall` $x = -\infty.$

`2:` Via **AAVI** gilt: $(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

`3.1:` Aus `1.2.Fall`"$x = -\infty$" und
aus `2`"$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$"
folgt: $x + (-\infty) = -\infty.$

`3.2:` Aus `2`"$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$" und
aus `1.2.Fall`"$x = -\infty$"
folgt: $(-\infty) + x = -\infty.$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$

□

109-24. Aussage **109-16** wird nun via **107-6** auf 1 angewendet:

109-24(Satz)

`a)` $-1 < 0 < 1.$

`b)` $0 \neq -1.$

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-24**

`1:` Via **107-6** gilt: $0 < 1.$

`2:` Aus `1`“$0 < 1$”
folgt via **109-16**: $-1 < 0.$

`3.a):` Aus `2`“$-1 < 0$” und aus `1`“$0 < 1$”
folgt: $-1 < 0 < 1.$

`4:` Aus `2`“$-1 < 0$”
folgt via **41-3**: $-1 \neq 0.$

`5.b):` Aus `4`
folgt: $0 \neq -1.$

$\square$

109-25. Nun wird die 2 in die Essays eingeführt:

109-25(Definition)

$$2 = 1 + 1.$$

RECH-**Notation**.

109-26. Es werden nun einige Eigenschaften von 2 und -2 bewiesen:

109-26(Satz)

a) *"$2 \in \mathbb{R}$" und "$-2 \in \mathbb{R}$".*

b) $-2 < 0 < 2$.

c) $2 - 1 = 1$.

d) *"$-2 < -1$" und "$1 < 2$".*

e) *"$0 \neq 2$" und "$0 \neq -2$".*

f) *"$1 \neq 2$" und "$-1 \neq -2$".*

g) $2 = 1 - (-1)$.

h) $-2 = -1 - 1$.

i) *"$\mathsf{Re}2 = 2$" und "$\mathsf{Im}2 = 0$".*

j) *"$\mathsf{Re}(-2) = -2$" und "$\mathsf{Im}(-2) = 0$".*

RECH$\leq$-**Notation**.

Beweis **109-26** a)

1: Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$
folgt via $+$**SZ**: $1 + 1 \in \mathbb{R}$.

2: Aus "$2 = 1 + 1$" und
aus 1"$1 + 1 \in \mathbb{R}$"
folgt: $2 \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-2 \in \mathbb{R}$.

4: Aus 2"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus 3"$-2 \in \mathbb{R}$"
folgt: $(2 \in \mathbb{R}) \wedge (-2 \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **109-26**</u> `b)`

`1:` Aus **109-24**"$0 < 1$" und
aus **109-24**"$0 < 1$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < 1 + 1.$

`2:` Aus `1`"$0 < 1 + 1$" und
aus "$2 = 1 + 1$"
folgt: $0 < 2.$

`3:` Aus `2`"$0 < 2$"
folgt via **109-16**: $-2 < 0.$

`4:` Aus `3`"$-2 < 0$" und
aus `2`"$0 < 2$"
folgt: $-2 < 0 < 2.$

`c)`

`1:`

$$
\begin{aligned}
& 2 - 1 \\
\stackrel{\mathbf{109-25(Def)}}{=} \; & (1 + 1) - 1 \\
= \; & (1 + 1) + (-1) \\
\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} \; & 1 + (1 + (-1)) \\
= \; & 1 + (1 - 1) \\
\stackrel{\mathbf{102-10}}{=} \; & 1 + 0 \\
\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} \; & 1.
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1`
folgt: $2 - 1 = 1.$

Beweis **109-26** `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $2 \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $2 - 1 = 1$.

`2.1:` Aus `1.1`“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $2 \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus **109-24**“$0 < 1$” und
aus `1.2`“$2 - 1 = 1$”
folgt: $0 < 2 - 1$.

`3:` Aus `2.2`“$0 < 2 - 1$” und
aus `2.1`“$2 \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-9**: $1 < 2$.

`4:` Aus `3`“$1 < 2$”
folgt via **109-14**: $-2 < -1$.

`5:` Aus `4`“$-2 < -1$” und
aus `3`“$1 < 2$”
folgt: $(-2 < -1) \wedge (1 < 2)$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $0 < 2$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $-2 < 0$.

`2.1:` Aus `1.1`“$0 < 2$”
folgt via **41-3**: $0 \neq 2$.

`2.2:` Aus `1.2`“$-2 < 0$”
folgt via **41-3**: $-2 \neq 0$.

`3:` Aus `2.2`
folgt: $0 \neq -2$.

`4:` Aus `2.1`“$0 \neq 2$” und
aus `3`“$0 \neq -2$”
folgt: $(0 \neq 2) \wedge (0 \neq -2)$.

<u>Beweis **109-26**</u> `f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $1 < 2.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $-2 < -1.$

`2.1:` Aus `1.1`“$1 < 2$”
folgt via **41-3**: $1 \neq 2.$

`2.2:` Aus `1.2`“$-2 < -1$”
folgt via **41-3**: $-2 \neq -1.$

`3:` Aus `2.2`
folgt: $-1 \neq -2.$

`4:` Aus `2.1`“$1 \neq 2$” und
aus `3`“$-1 \neq -2$”
folgt: $(1 \neq 2) \wedge (-1 \neq -2).$

`g)`

`1:` $2 \overset{\mathbf{109-25(Def)}}{=} 1+1 \overset{\mathbf{FS-+}}{=} 1-(-1).$

`2:` Aus `1`
folgt: $2 = 1-(-1).$

`h)`

`1:` $-2 \overset{\mathbf{109-25(Def)}}{=} -(1+1) \overset{\mathbf{FS-+}}{=} -1-1.$

`2:` Aus `1`
folgt: $-2 = -1-1.$

`i)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $2 \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `1`“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $2 \in \mathbb{T}.$

`3:` Aus `2`“$2 \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(2 = \mathsf{Re}2) \wedge (\mathsf{Im}2 = 0).$

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{Re}2 = 2) \wedge (\mathsf{Im}2 = 0).$

Beweis **109-26** `j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $-2 \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$-2 \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $-2 \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2` "$-2 \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(-2 = \mathsf{Re}(-2)) \wedge (\mathsf{Im}(-2) = 0)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{Re}(-2) = -2) \wedge (\mathsf{Im}(-2) = 0)$.

$\square$

FS$-\cdot$: FundamentalSatz $-\cdot$.

Ersterstellung: 02/08/09 **Letzte Änderung: 29/02/12**

110-1. Es wird nun der erste von fünf HilfsSätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-\cdot$ bewiesen:

110-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x = +\infty$. *oder* $x = -\infty$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt "$(-x) \cdot y = -x \cdot y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **110-1**

$\leq$-**Notation**.

1.1: Nach "$\rightarrow)$ *oder*" gilt: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

1.2: Aus $\rightarrow)$ "$y \in \mathbb{S}$" folgt via **107-18**: $(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$.

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x = +\infty) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (0 < y) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x = -\infty) \wedge (0 < y). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **110-1**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{2.1.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y < 0).$

`3.1:` Aus `2.1.Fall` folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y < 0$" folgt via **107-22** $(-\infty) \cdot y = +\infty.$

`3.3:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y < 0$" folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = -\infty.$

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(+\infty)) \cdot y \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} +\infty \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -(-\infty)$
$\stackrel{3.3}{=} -((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y = 0).$

`3.1:` Aus `2.2.Fall` folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.2.Fall` folgt: $y = 0.$

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(+\infty)) \cdot y \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot 0 \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\textbf{98-15}}{=} -0$
$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -((+\infty) \cdot 0) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot 0) \stackrel{3.2}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

...

Beweis **110-1**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x = +\infty) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots 0 < y$” folgt via **107-22**: $(-\infty) \cdot y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`“$\ldots 0 < y$” folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(+\infty)) \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{3.3}{=} -((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

`2.4.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y < 0)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`“$\ldots y < 0$” folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`“$\ldots y < 0$” folgt via **107-22**: $(-\infty) \cdot y = +\infty$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(-\infty)) \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{3.3}{=} -((-\infty) \cdot y) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

<u>Beweis **110-1**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.5.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y = 0)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall` folgt: $y = 0$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(-\infty)) \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -((-\infty) \cdot 0) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot 0) \stackrel{3.2}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{2.6.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall`"$\ldots 0 < y$" folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.6.Fall`"$\ldots 0 < y$" folgt via **107-22**: $(-\infty) \cdot y = -\infty$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-(-\infty)) \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.2}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(-\infty)$
$\stackrel{3.3}{=} -((-\infty) \cdot y) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

□

110-2. Nun wird der zweite von fünf HilfsSätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-\cdot$ bewiesen. Interessanter Weise kommt beim Beweis nicht das **KGM** zum Einsatz:

110-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow)$ $y = +\infty$. *oder* $y = -\infty$.

Dann folgt "$(-x) \cdot y = -x \cdot y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **110-2**

$\leq$-**Notation**.

1.1: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$" folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

1.2: Nach "$\rightarrow)$ *oder*" gilt: $(y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

2: Aus 1.1 und aus 1.2 folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x < 0) \wedge (y = +\infty) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y = +\infty) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y = +\infty) \\ \vee & (x < 0) \wedge (y = -\infty) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y = -\infty) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y = -\infty). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

...

<u>Beweis **110-2**</u>

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x < 0) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0\ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0\ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`3.3:` Aus `2.1.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$0 < -x$"
folgt via **107-22**: $(-x) \cdot (+\infty) = +\infty$.

`5:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.3}{=} (-x) \cdot (+\infty) \stackrel{4}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(-\infty) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (+\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

`2.2.Fall` $(x = 0) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $x = 0$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-0) \cdot y \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 \cdot y \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(0 \cdot (+\infty)) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

Beweis **110-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(0 < x) \wedge (y = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **109-16**: $-x < 0$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`“$-x < 0$”
folgt via **107-22**: $(-x) \cdot (+\infty) = -\infty$.

`5:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.3}{=} (-x) \cdot (+\infty) \stackrel{4}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (+\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

`2.4.Fall` $(x < 0) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`“$x < 0 \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`“$x < 0 \ldots$”
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`“$0 < -x$”
folgt via **107-22**: $(-x) \cdot (-\infty) = -\infty$.

`5:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.3}{=} (-x) \cdot (-\infty) \stackrel{4}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(+\infty) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (-\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

Beweis **110-2**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.5.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $x = 0$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-0) \cdot y \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 \cdot y \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(0 \cdot (-\infty)) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (-\infty)) \stackrel{3.2}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{2.6.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (y = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **109-16**: $-x < 0$.

`3.3:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$-x < 0$"
folgt via **107-22**: $(-x) \cdot (-\infty) = +\infty$.

`5:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.3}{=} (-x) \cdot (-\infty) \stackrel{4}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(-\infty) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot (-\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

□

110-3. Im dritten von fünf HilfsSätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-\cdot$ wird die Gleichung $(-x) \cdot y = -x \cdot y$ für alle $x, y \in \mathbb{S}$ bewiesen:

110-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt "$(-x) \cdot y = -x \cdot y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **110-3**

`1.1`: Aus $\rightarrow)$ "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2`: Aus $\rightarrow)$ "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`3`: Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$
\begin{aligned}
& (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (x \in \mathbb{R}) \wedge ((y = +\infty) \vee (y = -\infty)) \\
\vee \quad & ((x = +\infty) \vee (x = -\infty)) \wedge (y \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & ((x = +\infty) \vee (x = -\infty)) \wedge ((y = +\infty) \vee (y = -\infty)).
\end{aligned}
$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

Aus `3.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \dots$" und
aus `3.1.Fall`"$\dots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **106-1**: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

<u>Beweis **110-3**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(x \in \mathbb{R}) \wedge ((y = +\infty) \vee (y = -\infty)).$

Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `3.2.Fall` "$\ldots (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$"
folgt via **110-2**: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $((x = +\infty) \vee (x = -\infty)) \wedge (y \in \mathbb{R}).$

Aus `3.3.Fall` "$(x = +\infty) \vee (x = -\infty) \ldots$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **110-1**: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

$\boxed{\texttt{3.4.Fall}}$ $((x = +\infty) \vee (x = -\infty)) \wedge ((y = +\infty) \vee (y = -\infty)).$

Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `3.4.Fall` "$\ldots (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$"
folgt vai **110-2**: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y.$

□

110-4. Im vorletzten von fünf HilfsSätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-\cdot$ wird die Gleichung $(-x)\cdot y = -x\cdot y$ für alle treellen Zahlen x, y bewiesen:

110-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow)$ $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt "$(-x)\cdot y = -x\cdot y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **110-4**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$\begin{array}{ll} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{S}\ldots$" und
aus `4.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via **110-3**: $(-x)\cdot y = -x\cdot y$.

...

Beweis **110-4**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.2.1.Fall}}$ $x = 0$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{\texttt{3.2.1.Fall}}{=} (-0) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-0) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-15}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(0 \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\texttt{3.2.1.Fall}}{=} -(x \cdot \mathsf{nan})$
$\stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{3.2.2.Fall}}$ $0 \neq x$.

`4.1:` Aus `3.2.2.Fall`“$0 \neq x$” und
aus $\rightarrow$)“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4.2:` Aus $\rightarrow$)“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{T}$.

`4.3:` Aus `3.2.2.Fall`“$0 \neq x$”
folgt via **100-13**: $0 \neq -x$.

`5:` Aus `4.3`“$0 \neq -x$” und
aus `4.2`“$-x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $(-x) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-x) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{5}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan}$
$\stackrel{4.1}{=} -(x \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

Beweis **110-4**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Es gilt: $(y = 0) \vee (0 \neq y)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.2.1.Fall}}$ $y = 0$.

`4:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\mathsf{nan}) \cdot y \stackrel{\text{3.2.1.Fall}}{=} (-\mathsf{nan}) \cdot 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98\text{-}15}}{=} -0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -(\mathsf{nan} \cdot 0) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot 0) \stackrel{\text{3.2.1.Fall}}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`5:` Aus `4` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{3.2.2.Fall}}$ $0 \neq y$.

`4:` Aus `3.2.2.Fall` "$0 \neq y$" und aus →) "$y \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y = \mathsf{nan}$.

`5:` $(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\mathsf{nan}) \cdot y \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{4}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{4}{=} -(\mathsf{nan} \cdot y) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y$.

`6:` Aus `5` folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

...

<u>Beweis **110-4**</u>

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $$(-x) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (-\mathsf{nan}) \cdot y \stackrel{3.2}{=} (-\mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\textbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\textbf{97-5}}{=} -(\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{3.1}{=} -(x \cdot \mathsf{nan})$$
$$\stackrel{3.2}{=} -(x \cdot y) = -x \cdot y.$$

`5:` Aus `4`
folgt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

$\square$

110-5. Im fünften von fünf HilfsSätzen auf dem Weg zum **FundamentalSatz** $-\cdot$ wird nun gezeigt, dass $(-x)\cdot y = -x\cdot y$ für *alle Zahlen* x, y gilt:

110-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *x Zahl.*

$\rightarrow)$ *y Zahl.*

Dann folgt "$(-x)\cdot y = -x\cdot y$".

RECH-**Notation**.

Beweis **110-5**

REIM-**Notation**.

1.1: Aus $\rightarrow)$"x Zahl"
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

1.2: Aus $\rightarrow)$"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

1.3: Aus $\rightarrow)$"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

1.4: Aus $\rightarrow)$"y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

1.5: Aus $\rightarrow)$"y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

1.6: Aus $\rightarrow)$"x Zahl" und
aus $\rightarrow)$"y Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x\cdot y$ Zahl.

...

<u>Beweis</u> **110-5** ...

`2.1:` Aus `1.1`“$-x$ Zahl” und
aus →) “y Zahl”
folgt via **96-15**: $(-x) \cdot y$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.6`“$x \cdot y$ Zahl”
folgt via **96-11**: $-x \cdot y$ Zahl.

`2.3:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **110-4**: $(-\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`2.4:` Aus `1.2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.5`“$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **110-4**: $(-\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = -(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`2.5:` Aus `1.3`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **110-4**: $(-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`2.6:` Aus `1.3`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” und
aus `1.5`“$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **110-4**: $(-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`3.1:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}((-x) \cdot y)\\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &(\mathsf{Re}(-x)) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}(-x)) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
\stackrel{\mathbf{96-27}}{=}\ &(-\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}(-x)) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
\stackrel{\mathbf{96-27}}{=}\ &(-\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
\stackrel{2.3}{=}\ &-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
\stackrel{2.6}{=}\ &-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))\\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ &-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\
\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}\ &-((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))\\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ &-\mathsf{Re}(x \cdot y)\\
\stackrel{\mathbf{96-27}}{=}\ &\mathsf{Re}(-x \cdot y).
\end{aligned}$$

...

Beweis **110-5** . . .

3.2: $$\mathsf{Im}((-x)\cdot y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(-x))\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}(-x))\cdot(\mathsf{Re}y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}(-x))\cdot(\mathsf{Re}y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$$

$$\stackrel{2.4}{=} -(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(-\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$$

$$\stackrel{2.5}{=} -(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$= -(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} -\mathsf{Im}(x\cdot y)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} \mathsf{Im}(-x\cdot y).$$

4: Aus 2.1“$(-x)\cdot y$ Zahl”,
aus 2.2“$-x\cdot y$ Zahl”,
aus 3.1“$\mathsf{Re}((-x)\cdot y)=\ldots=\mathsf{Re}(-x\cdot y)$” und
aus 3.2“$\mathsf{Im}((-x)\cdot y)=\ldots=\mathsf{Im}(-x\cdot y)$”
folgt via **AAIV**: $$(-x)\cdot y=-x\cdot y.$$

□

110-6. Der **FundamentalSatz** $-\cdot$ ist voraussetzungsfrei gültig:

110-6(Satz) (FS$-\cdot$: FundamentalSatz $-\cdot$)

a) $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -x\cdot y.$

b) $(-x)\cdot(-y) = x\cdot y.$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **110-6** `a)`

`1:` Es gilt: $(x\in\mathbb{A})\wedge(y\in\mathbb{A}) \vee x\notin\mathbb{A} \vee y\notin\mathbb{A}.$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x\in\mathbb{A})\wedge(y\in\mathbb{A}).$

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x\in\mathbb{A}\ldots$" folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y\in\mathbb{A}$" folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl" und aus `2.2`"y Zahl" folgt via **110-5**: $(-x)\cdot y = -x\cdot y.$

`3.2:` Aus `2.2`"y Zahl" und aus `2.1`"x Zahl" folgt via **110-5**: $(-y)\cdot x = -y\cdot x.$

`4:` $x\cdot(-y) \stackrel{\textbf{KGM}}{=} (-y)\cdot x \stackrel{3.2}{=} -y\cdot x \stackrel{\textbf{KGM}}{=} -x\cdot y.$

`5:` Aus `3.1`"$(-x)\cdot y = -x\cdot y$" und aus `4`"$x\cdot(-y)=\ldots=-x\cdot y$" folgt: $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -x\cdot y.$

...

Beweis **110-6** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot (-y) = \mathcal{U}$.

2.3: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

3.1: $(-x) \cdot y \stackrel{2.3}{=} \mathcal{U} \cdot y \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

3.2: $-x \cdot y \stackrel{2.1}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

4: Aus 3.1"$(-x) \cdot y = \ldots = \mathcal{U}$",
aus 2.2"$x \cdot (-y) = \mathcal{U}$" und
aus 3.2"$-x \cdot y = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.3.Fall"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.3.Fall"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $(-x) \cdot y = \mathcal{U}$.

2.3: Aus 1.3.Fall"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-y = \mathcal{U}$.

3.1: $x \cdot (-y) \stackrel{2.3}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

3.2: $-x \cdot y \stackrel{2.1}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

4: Aus 2.2"$(-x) \cdot y = \mathcal{U}$",
aus 3.1"$x \cdot (-y) = \ldots = \mathcal{U}$" und
aus 3.2"$-x \cdot y = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

<u>Beweis **110-6** `b)`</u>

`1:` $$(-x)\cdot(-y) \overset{\texttt{a)}}{=} -(x\cdot(-y)) \overset{\texttt{a)}}{=} -(-(x\cdot y)) \overset{\mathbf{100-4}}{=} x\cdot y.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-x)\cdot(-y) = x\cdot y.$$

$\square$

110-7. Nun wird **FS**$-\cdot$ auf $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}$ angewendet:

<u>**110-7(Satz)**</u>

a) $(-0) \cdot (-0) = (-0) \cdot 0 = 0 \cdot (-0) = 0$.

b) $(-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$.

c) $(-1) \cdot (-1) = 1$.

d) $-\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

e) $-\mathsf{i} \cdot (+\infty) = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

f) $-\mathsf{i} \cdot (-\infty) = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

g) $(-\mathsf{i}) \cdot \mathsf{i} = \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{i}) = 1$.

h) $(-\mathsf{i}) \cdot (-\mathsf{i}) = -1$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **110-7**</u> `a)`

`1.1:` Via **98-15** gilt: $-0 = 0$.

`1.2:` Via **98-16** gilt: $0 \cdot 0 = 0$.

`2.1:` Aus `1.1`“$-0 = 0$” und
aus `1.2`“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $(-0) \cdot (-0) = 0$.

`2.2:` Aus `1.1`“$-0 = 0$” und
aus `1.2`“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $(-0) \cdot 0 = 0$.

`2.3:` Aus `1.1`“$-0 = 0$” und
aus `1.2`“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $0 \cdot (-0) = 0$.

`3:` Aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(-0) \cdot (-0) = (-0) \cdot 0 = 0 \cdot (-0) = 0$.

<u>Beweis **110-7**</u> `b)`

`1.1:` $$(-1)\cdot 1 \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -1\cdot 1 \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} -1.$$

`1.2:` $$1\cdot(-1) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -1\cdot 1 \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} -1.$$

`2:` Aus `1.1`“$(-1)\cdot 1 = \ldots = -1$” und
aus `1.2`“$1\cdot(-1) = \ldots = -1$”
folgt: $$(-1)\cdot 1 = 1\cdot(-1) = -1.$$

`c)`

`1:` $$(-1)\cdot(-1) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} 1\cdot 1 \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} 1.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-1)\cdot(-1) = 1.$$

`d)`

`1:` $$-\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} \mathsf{i}\cdot(-\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan} = \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`e)`

`1:` $$-\mathsf{i}\cdot(+\infty) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} \mathsf{i}\cdot(-(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{i}\cdot(-\infty).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-\mathsf{i}\cdot(+\infty) = \mathsf{i}\cdot(-\infty).$$

`f)`

`1:` $$-\mathsf{i}\cdot(-\infty) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} \mathsf{i}\cdot(-(-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-\mathsf{i}\cdot(-\infty) = \mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`g)`

`1.1:` $$(-\mathsf{i})\cdot\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -\mathsf{i}\cdot\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} -(-1) \stackrel{\mathbf{100-2}}{=} 1.$$

`1.2:` $$\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{i}) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -\mathsf{i}\cdot\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} -(-1) \stackrel{\mathbf{100-2}}{=} 1.$$

`2:` Aus `1.1`“$(-\mathsf{i})\cdot\mathsf{i} = \ldots = 1$” und
aus `1.2`“$\mathsf{i}\cdot(-\mathsf{i}) = \ldots = 1$”
folgt: $$(-\mathsf{i})\cdot\mathsf{i} = \mathsf{i}\cdot(-\mathsf{i}) = 1.$$

Beweis **110-7** `h)`

`1:` $$(-\mathsf{i})\cdot(-\mathsf{i}) \overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{i}\cdot\mathsf{i} \overset{\mathbf{98-19}}{=} -1.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(-\mathsf{i})\cdot(-\mathsf{i}) = -1.$$

□

110-8. Unter Zuhilfenahme von **FS**$-\cdot$ folgt unter anderem $x-\mathsf{i}\cdot(-y)=x+\mathsf{i}\cdot y$:

110-8(Satz)

a) $x+\mathsf{i}\cdot(-y)=x-\mathsf{i}\cdot y$.

b) $x-\mathsf{i}\cdot(-y)=x+\mathsf{i}\cdot y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **110-8** a)

1: $$x+\mathsf{i}\cdot(-y)\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}x+(-\mathsf{i}\cdot y)=x-\mathsf{i}\cdot y.$$

2: Aus 1 folgt: $$x+\mathsf{i}\cdot(-y)=x-\mathsf{i}\cdot y.$$

b)

1: $$x-\mathsf{i}\cdot(-y)\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}x-(-\mathsf{i}\cdot y)\overset{\mathbf{FS}-+}{=}x+\mathsf{i}\cdot y.$$

2: Aus 1 folgt: $$x-\mathsf{i}\cdot(-y)=x+\mathsf{i}\cdot y.$$

□

110-9. Es gilt $\mathsf{ab2}(-x) = \mathsf{ab2}(x)$:

110-9(Satz)

$$\mathsf{ab2}(-x) = \mathsf{ab2}(x).$$

`RECH`-**Notation**.

Beweis **110-9**

`REIM`-**Notation**.

1: $\mathsf{ab2}(-x)$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}(-x)) \cdot (\mathsf{Re}(-x)) + (\mathsf{Im}(-x)) \cdot (\mathsf{Im}(-x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}(-x)) \cdot (\mathsf{Im}(-x))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-27}}{=} (-\mathsf{Re}x) \cdot (-\mathsf{Re}x) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (-\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (-\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(x).$$

2: Aus 1 folgt: $\mathsf{ab2}(-x) = \mathsf{ab2}(x)$.

□

NTF$\mathbb{S}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{S}$.
NTF$\mathbb{T}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{T}$.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 09/02/12**

111-1. Nun wird Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{S}$ vorbereitet:

111-1(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

→) $x \in \mathbb{S}$.

→) $y \in \mathbb{S}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y$.

`ii)` *“*$0 \neq x$*” und “*$0 \neq y$*”.*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **111-1**

$\leq$-**Notation**.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$.

`1`: Es gilt:

$$(x = 0) \vee (y = 0) \\ \vee \\ (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

`2`: Aus `1` folgt:

$$x = 0 \\ \vee \quad y = 0 \\ \vee \quad (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **111-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y.$

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0.$

`3:` Aus →) “ $y \in \mathbb{S}$ ”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3` “ y Zahl ”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0.$

`5:` $x \cdot y \stackrel{\texttt{2.1.Fall}}{=} 0 \cdot y \stackrel{4}{=} 0.$

`6:` Es gilt `VS` gleich “ $0 \neq x \cdot y$ ” .
Es gilt `5` “ $x \cdot y = \ldots = 0$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`2.2.Fall` $y = 0.$

`3:` Aus →) “ $x \in \mathbb{S}$ ”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3` “ x Zahl ”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`5:` $x \cdot y \stackrel{\texttt{2.2.Fall}}{=} x \cdot 0 \stackrel{4}{=} 0.$

`6:` Es gilt `VS` gleich “ $0 \neq x \cdot y$ ” .
Es gilt `5` “ $x \cdot y = \ldots = 0$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`2.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

<u>Beweis **111-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `1.1` "$(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$"
folgt: $(x < 0) \vee (0 < x)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y$" und
aus `1.2` "$(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$"
folgt: $(y < 0) \vee (0 < y)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (x < 0) \wedge (y < 0) \\ \vee \quad & (x < 0) \wedge (0 < y) \\ \vee \quad & (0 < x) \wedge (y < 0) \\ \vee \quad & (0 < x) \wedge (0 < y). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

`4.1:` Aus `3.1.Fall` "$x < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`4.2:` Aus `3.1.Fall` "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`5:` Aus `4.1` "$0 < -x$" und
aus `4.2` "$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < (-x) \cdot (-y)$.

`6:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

`7:` Aus `5` "$0 < (-x) \cdot (-y)$" und
aus `6` "$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$"
folgt: $0 < x \cdot y$.

`8:` Aus `7` "$0 < x \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot y$.

...

<u>Beweis **111-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.2.Fall}}$ $(x < 0) \wedge (0 < y)$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$x < 0 \dots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`5:` Aus `4`"$0 < -x$" und
aus `3.2.Fall`"$\dots 0 < y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < (-x) \cdot y$.

`6:` Aus `5`"$0 < (-x) \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq (-x) \cdot y$.

`7:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot y = -x \cdot y$.

`8:` Aus `6`"$0 \neq (-x) \cdot y$" und
aus `7`"$(-x) \cdot y = -x \cdot y$"
folgt: $0 \neq -x \cdot y$.

`9:` Aus `8`"$0 \neq -x \cdot y$"
folgt via **100-13**: $0 \neq x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $(0 < x) \wedge (y < 0)$.

`4:` Aus `3.3.Fall`"$\dots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`5:` Aus `3.3.Fall`"$0 < x \dots$" und
aus `4`"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot (-y)$.

`6:` Aus `5`"$0 < x \cdot (-y)$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot (-y)$.

`7:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

`8:` Aus `6`"$0 \neq x \cdot (-y)$" und
aus `7`"$x \cdot (-y) = -x \cdot y$"
folgt: $0 \neq -x \cdot y$.

`9:` Aus `8`"$0 \neq -x \cdot y$"
folgt via **100-13**: $0 \neq x \cdot y$.

...

Beweis **111-1** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.4.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`4:` Aus **`3.4.Fall`**"$0 < x \ldots$" und
aus **`3.4.Fall`**"$\ldots 0 < y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot y$.

`5:` Aus 4"$0 < x \cdot y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y$.

□

111-2. Nun wird der Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{S}$ bewiesen:

111-2(Satz) (NTF$\mathbb{S}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{S}$)

Unter den Voraussetzungen …

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

… sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $x \cdot y = 0$.

`ii)` "$x = 0$" *oder* "$y = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **111-2**

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus $\rightarrow$) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **111-1**: $(0 \neq x \cdot y) \Leftrightarrow ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.

□

111-3. Nun wird der Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{T}$ vorbereitet:

111-3(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{T}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot y$.

`ii)` *"$0 \neq x$" und "$0 \neq y$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **111-3**

$\leq$-**Notation**.

`i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$.

`1:` Es gilt:

$$(x = 0) \vee (y = 0) \\ \vee \\ (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$x = 0 \\ \vee \quad y = 0 \\ \vee \quad (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **111-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot y$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = 0$.

`3:` Aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`4:` Aus `3`“y Zahl”
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`5:` $x \cdot y \overset{\texttt{2.1.Fall}}{=} 0 \cdot y \overset{4}{=} 0$.

`6:` Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x \cdot y$”.
Es gilt `5`“$x \cdot y = \ldots = 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.2.Fall` $y = 0$.

`3:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`4:` Aus `3`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`5:` $x \cdot y \overset{\texttt{2.2.Fall}}{=} x \cdot 0 \overset{4}{=} 0$.

`6:` Es gilt `VS` gleich “$0 \neq x \cdot y$”.
Es gilt `5`“$x \cdot y = \ldots = 0$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

Beweis **111-3** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` “$(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$” und
aus `1.2` “$(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$”
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall` “$x \in \mathbb{S} \ldots$”,
aus `2.1.Fall` “$\ldots y \in \mathbb{S}$”,
aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$” und
aus `VS` gleich “$\ldots 0 \neq y$”
folgt via **111-1**: $0 \neq x \cdot y$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$0 \neq x \ldots$” und
aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $x \cdot y \stackrel{3.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus **95-7** “$0 \neq \mathsf{nan}$” und
aus `4` “$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

...

<u>Beweis **111-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "... $0 \neq y$" und
aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`4:` $x \cdot y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus 4"$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` $x \cdot y \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`5:` Aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus 4"$x \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \neq x \cdot y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $0 \neq x \cdot y$.

□

111-4. Nun wird der Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{T}$ bewiesen:

111-4(Satz) (NTF$\mathbb{T}$: NullTeilerFreiheit in $\mathbb{T}$)

Unter den Voraussetzungen ...

→) $x \in \mathbb{T}$.

→) $y \in \mathbb{T}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $x \cdot y = 0$.

`ii)` *"$x = 0$" oder "$y = 0$".*

RECH-**Notation**.

Beweis **111-4**

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **111-3**: $(0 \neq x \cdot y) \Leftrightarrow ((0 \neq x) \wedge (0 \neq y))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow ((x = 0) \vee (y = 0))$.

□

111-5. Falls $x \in \mathbb{T}$, dann ist $x \cdot x$ genau dann$\neq 0$, wenn $0 \neq x$:

<u>111-5(Satz)</u>

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 \neq x \cdot x$.

`ii)` $0 \neq x$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **111-5**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 \neq x \cdot x$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x \cdot x$"
folgt via **111-3**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $0 \neq x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $0 \neq x$.

Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus `VS` gleich "$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$0 \neq x$"
folgt via **111-3**: $0 \neq x \cdot x$.

□

111-6. Falls $x \in \mathbb{T}$, dann ist $x \cdot x$ genau dann gleich 0, wenn $x = 0$:

111-6(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $x \cdot x = 0$.

`ii)` $x = 0$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **111-6** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot x = 0$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \cdot x = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $(x = 0) \vee (x = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x = 0$.

Aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$",
aus $\rightarrow$) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{T}$: $x \cdot x = 0$.

□

Weiterführung **FS**$\leq \cdot$.
Konsequenzen für $x \cdot x$ mit $x \in \mathbb{S}$.

Ersterstellung: 09/09/09 **Letzte Änderung: 09/02/12**

112-1. Aus $0 < x$ und $y < 0$ folgt $x \cdot y < 0$. Auch gilt Ähnliches:

112-1(Satz)

a) *Aus* "$0 < x$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$x \cdot y < 0$".

b) *Aus* "$0 < x$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

c) *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

d) *Aus* "$0 \leq x$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **112-1** a) VS gleich $(0 < x) \wedge (y < 0)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

2: Aus VS gleich "$0 < x \ldots$" und
aus 1"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot (-y)$.

3: Via **FS**$- \cdot$ gilt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

4: Aus 2"$0 < x \cdot (-y)$" und
aus 3"$x \cdot (-y) = -x \cdot y$"
folgt: $0 < -x \cdot y$.

5: Aus 4"$0 < -x \cdot y$"
folgt via **109-16**: $x \cdot y < 0$.

<u>Beweis **112-1**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y \leq 0).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `1`"$0 \leq -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 \leq x \cdot (-y).$

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y.$

`4:` Aus `2`"$0 \leq x \cdot (-y)$" und
aus `3`"$x \cdot (-y) = -x \cdot y$"
folgt: $0 \leq -x \cdot y.$

`5:` Aus `4`"$0 \leq -x \cdot y$"
folgt via **109-16**: $x \cdot y \leq 0.$

`c)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (y < 0).$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus `1`"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 \leq x \cdot (-y).$

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y.$

`4:` Aus `2`"$0 \leq x \cdot (-y)$" und
aus `3`"$x \cdot (-y) = -x \cdot y$"
folgt: $0 \leq -x \cdot y.$

`5:` Aus `4`"$0 \leq -x \cdot y$"
folgt via **109-16**: $x \cdot y \leq 0.$

<u>Beweis **112-1**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (y \le 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \le 0$"
folgt via **109-16**: $0 \le -y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$" und
aus `1`"$0 \le -y$"
folgt via **FS**$\le \cdot$: $0 \le x \cdot (-y)$.

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

`4:` Aus `2`"$0 \le x \cdot (-y)$" und
aus `3`"$x \cdot (-y) = -x \cdot y$"
folgt: $0 \le -x \cdot y$.

`5:` Aus `4`"$0 \le -x \cdot y$"
folgt via **109-16**: $x \cdot y \le 0$.

□

112-2. Aus $x < 0$ und $0 < y$ folgt $x \cdot y < 0$. Auch gilt Ähnliches:

112-2(Satz)

a) *Aus* "$x < 0$" *und* "$0 < y$" *folgt* "$x \cdot y < 0$".

b) *Aus* "$x < 0$" *und* "$0 \leq y$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

c) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$0 < y$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

d) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$0 \leq y$" *folgt* "$x \cdot y \leq 0$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **112-2**</u> `a)` `VS` gleich $(x < 0) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$" und
aus `VS` gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **112-1**: $y \cdot x < 0$.

`2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y = y \cdot x$" und
aus `1`"$y \cdot x < 0$"
folgt: $x \cdot y < 0$.

`b)` `VS` gleich $(x < 0) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$" und
aus `VS` gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **112-1**: $y \cdot x \leq 0$.

`2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y = y \cdot x$" und
aus `1`"$y \cdot x \leq 0$"
folgt: $x \cdot y \leq 0$.

`c)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (0 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y$" und
aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **112-1**: $y \cdot x \leq 0$.

`2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y = y \cdot x$" und
aus `1`"$y \cdot x \leq 0$"
folgt: $x \cdot y \leq 0$.

`d)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$" und
aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **112-1**: $y \cdot x \leq 0$.

`2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y = y \cdot x$" und
aus `1`"$y \cdot x \leq 0$"
folgt: $x \cdot y \leq 0$.

$\square$

112-3. Aus $x < 0$ und $y < 0$ folgt $0 < x \cdot y$. Auch gilt Ähnliches:

112-3(Satz)

a) *Aus* "$x < 0$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$0 < x \cdot y$".

b) *Aus* "$x < 0$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

c) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$y < 0$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

d) *Aus* "$x \leq 0$" *und* "$y \leq 0$" *folgt* "$0 \leq x \cdot y$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **112-3** a) VS gleich $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

1.1: Aus VS gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

2: Aus 1.1"$0 < -x$" und
aus 1.2"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < (-x) \cdot (-y)$.

3: Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

4: Aus 2"$0 < (-x) \cdot (-y)$" und
aus 3"$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$"
folgt: $0 < x \cdot y$.

<u>Beweis</u> **112-3** `b)` `VS` gleich $(x < 0) \wedge (y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 < -x$" und
aus `1.2`"$0 \leq -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 \leq (-x) \cdot (-y)$.

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (-x) \cdot (-y)$" und
aus `3`"$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$"
folgt: $0 \leq x \cdot y$.

`c)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y < 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$" und
aus `1.2`"$0 < -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 \leq (-x) \cdot (-y)$.

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (-x) \cdot (-y)$" und
aus `3`"$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$"
folgt: $0 \leq x \cdot y$.

<u>Beweis **112-3**</u> `d)` `VS` gleich $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq -x$" und
aus `1.2`"$0 \leq -y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 \leq (-x) \cdot (-y)$.

`3:` Via **FS**$- \cdot$ gilt: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (-x) \cdot (-y)$" und
aus `3`"$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$"
folgt: $0 \leq x \cdot y$.

$\square$

112-4. Mit Hilfe von **112-3** und **FS**$\leq\cdot$ wird nun gezeigt, dass für $x \in \mathbb{S}$ stets $0 \leq x \cdot x$ gilt:

112-4(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{S}$" folgt "$0 \leq x \cdot x$".

`RECH.`**≤-Notation**.

Beweis **112-4** `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x < 0$" und
aus `1.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **112-3**: $0 < x \cdot x$.

`3:` Aus 2"$0 < x \cdot x$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x \cdot x$.

`1.2.Fall` $0 \leq x$.

Aus `1.2.Fall`"$0 \leq x$" und
aus `1.2.Fall`"$0 \leq x$"
folgt via **FS**$\leq\cdot$: $0 \leq x \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \leq x \cdot x$.

□

112-5. Mit Hilfe von **NTF**$\mathbb{S}$ kann **112-4** verfeinert werden:

112-5(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` $0 < x \cdot x$.

`iii)` $-x \cdot x < 0$.

`RECH.`$\leq$**-Notation**

Beweis **112-5** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \neq x.$

`1`: Aus →) " $x \in \mathbb{S}$ "
folgt via **112-4**: $0 \leq x \cdot x.$

`2`: Aus `1` " $0 \leq x \cdot x$ "
folgt via **41-5**: $(0 < x \cdot x) \vee (0 = x \cdot x).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $0 < x \cdot x.$

`2.2.Fall` $0 = x \cdot x.$

`3`: Aus `2.2.Fall`
folgt: $x \cdot x = 0.$

`4`: Aus →) " $x \in \mathbb{S}$ ",
aus →) " $x \in \mathbb{S}$ " und
aus `3` " $x \cdot x = 0$ "
folgt via **NTF**$\mathbb{S}$: $(x = 0) \vee (x = 0).$

`5`: Aus `4`
folgt: $x = 0.$

`6`: Es gilt `5` " $x = 0$ ".
Es gilt `VS` gleich " $0 \neq x$ ".
Ex falso quodlibet folgt: $0 < x \cdot x.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen folgt: $0 < x \cdot x.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \cdot x.$

Aus `VS` gleich " $0 < x \cdot x$ "
folgt via **109-16**: $-x \cdot x < 0.$

<u>Beweis **112-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $-x \cdot x < 0.$

`1:` Aus `VS` gleich “$-x \cdot x < 0$”
folgt via **109-16**: $0 < x \cdot x.$

`2:` Aus `1`“$0 < x \cdot x$”
folgt via **41-3**: $0 \neq x \cdot x.$

`3:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”,
aus →) “$x \in \mathbb{S}$” und
aus `2`“$0 \neq x \cdot x$”
folgt via **111-1**: $0 \neq x.$

□

Kein allgemeines AssoziativGesetz Multiplikation.
Kein AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{A}$.
AGM$\mathbb{T}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{T}$.
AGM$\mathbb{R}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{R}$.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 10/02/12**

113-1. Falls - mindestens - eine der Klassen x, y, z *nicht* in $\mathbb{A}$ ist, dann gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ - und jeder dieser Terme ist gleich $\mathcal{U}$:

113-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$

$x \notin \mathbb{A}$.

oder

$y \notin \mathbb{A}$.

oder

$z \notin \mathbb{A}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

b) $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

c) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

RECH-**Notation**.

Beweis **113-1** `a)`

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $y \cdot z = \mathcal{U}$.

`3:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{2}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

`1.3.Fall` $z \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.3.Fall`"$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $y \cdot z = \mathcal{U}$.

`3:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{2}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **113-1**</u> `b)`

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:` $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{2}{=} \mathcal{U} \cdot z \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:` $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{2}{=} \mathcal{U} \cdot z \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

`1.3.Fall` $z \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.3.Fall`"$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

`c)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \cdot (y \cdot z) = \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$(x \cdot y) \cdot z = \mathcal{U}$"
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$\square$

113-2. Für drei Zahlen gilt ein AssoziativGesetz Multiplikation, wenn mindestens eine dieser drei Zahlen= 0 ist:

113-2(Satz)

Es gelte:

→) “x Zahl” und “y Zahl” und “z Zahl”.

→) $x = 0.$ *oder* $y = 0.$ *oder* $z = 0.$

Dann folgt:

a) $x \cdot (y \cdot z) = 0.$

b) $(x \cdot y) \cdot z = 0.$

c) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

RECH-**Notation**.

Beweis **113-2**

1.1: Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x=0)\vee(y=0)\vee(z=0)$.

Fallunterscheidung

1.1.1.Fall $x=0$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "$\ldots y$ Zahl$\ldots$ "
folgt via **FSM**0: $0\cdot y=0$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$\ldots z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0\cdot z=0$.

2.3: Aus $\rightarrow$) "$\ldots y$ Zahl$\ldots$ " und
aus $\rightarrow$) "$\ldots z$ Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y\cdot z$ Zahl.

3: Aus 2.3 "$y\cdot z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0\cdot(y\cdot z)=0$.

4.1: $x\cdot(y\cdot z)\stackrel{\text{1.1.1.Fall}}{=}0\cdot(y\cdot z)\stackrel{3}{=}0$.

4.2: $0\stackrel{2.2}{=}0\cdot z\stackrel{2.1}{=}(0\cdot y)\cdot z\stackrel{\text{1.1.1.Fall}}{=}(x\cdot y)\cdot z$.

5: Aus 4.1 "$x\cdot(y\cdot z)=\ldots=0$" und
aus 4.2 "$0=\ldots=(x\cdot y)\cdot z$"
folgt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=0$.

1.1.2.Fall $y=0$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "x Zahl$\ldots$ "
folgt via **FSM**0: $x\cdot 0=0$.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$\ldots z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0\cdot z=0$.

3.1: $x\cdot(y\cdot z)\stackrel{\text{1.1.2.Fall}}{=}x\cdot(0\cdot z)\stackrel{2.2}{=}x\cdot 0\stackrel{2.1}{=}0$.

3.2: $0\stackrel{2.2}{=}0\cdot z\stackrel{2.1}{=}(x\cdot 0)\cdot z\stackrel{\text{1.1.2.Fall}}{=}(x\cdot y)\cdot z$.

4: Aus 3.1 "$x\cdot(y\cdot z)=\ldots=0$" und
aus 3.2 "$0=\ldots=(x\cdot y)\cdot z$"
folgt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z=0$.

...

Beweis **113-2**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.1.3.Fall` $z = 0.$

`2.1:` Aus →) "x Zahl..."
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`2.2:` Aus →) "...y Zahl..."
folgt via **FSM**0: $y \cdot 0 = 0.$

`2.3:` Aus →) "x Zahl..." und
aus →) "...y Zahl..."
folgt via ·**SZ**: $x \cdot y$ Zahl.

`3:` Aus `2.3`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(x \cdot y) \cdot 0 = 0.$

`4.1:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{\texttt{1.1.3.Fall}}{=} x \cdot (y \cdot 0) \stackrel{\texttt{2.2}}{=} x \cdot 0 \stackrel{\texttt{2.1}}{=} 0.$

`4.2:` $0 \stackrel{\texttt{3}}{=} (x \cdot y) \cdot 0 \stackrel{\texttt{1.1.3.Fall}}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4.1`"$x \cdot (y \cdot z) = \ldots = 0$" und
aus `4.2`"$0 = \ldots = (x \cdot y) \cdot z$"
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1`	"$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = 0$"

`1.a):` Aus `A1`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = 0.$

`1.b):` Aus `A1`
folgt: $(x \cdot y) \cdot z = 0.$

`1.c):` Aus `A1`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

□

113-3. Wenn mindestens eine der Klassen x, y, z gleich 0 ist, dann gilt ohne Weiteres $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$:

<u>113-3(Satz)</u>

Es gelte:

$$\rightarrow) \quad \boxed{\begin{array}{ll} x = 0. & \\ \hline & \textit{oder} \\ y = 0. & \\ \hline & \textit{oder} \\ z = 0. & \end{array}}$$

Dann folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$*".*

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **113-3**</u>

`1:` Es gilt: $$(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$" folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A} \ldots$" folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`2.3:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{A}$" folgt via **95-4(Def)**: z Zahl.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl",
aus `2.2`"y Zahl",
aus `2.3`"z Zahl" und
aus →) "$(x = 0) \vee (y = 0) \vee (z = 0)$"
folgt via **113-2**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`1.2.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

Aus `1.2.Fall`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$"
folgt via **113-1**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

□

113-4. Unter Bezug auf folgendes Beispiel ist weder ein "allgemeines" noch ein "in $\mathbb{A}$ gültiges" AssoziativGesetz Multiplikation verfügbar:

113-4.Bemerkung

- Die Gleichung
  "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \wedge (z \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiters verfügbar.

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{C})) \Rightarrow (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

113-5. Wie an dem nunmehrigen Beispiel klar wird, ist weder ein allgemeines AssoziativGesetz Multiplikation noch ein AssoziativGesetz Multiplikation in $\mathbb{A}$ verfügbar, mehr noch: nicht einmal die noch spezielleren Voraussetzungen $x \in \mathbb{S}$ und $y, z \in \mathbb{C}$ reichen aus, um auf $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ zu schließen:

113-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = +\infty$.

$\rightarrow$) $y = 1 + \mathsf{i}$.

$\rightarrow$) $z = 1 - \mathsf{i}$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $y \in \mathbb{C}$.

c) $z \in \mathbb{C}$.

d) $y \cdot z = 2$.

e) $x \cdot y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

f) $x \cdot (y \cdot z) = +\infty$.

g) $(x \cdot y) \cdot z = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

h) $x \cdot (y \cdot z) \neq (x \cdot y) \cdot z$.

113-6. Wie aus **113-1,2,3,4,5** ersichtlich, ist ein "AssoziativGesetz Multiplikation" nur unter speziellen Voraussetzungen zu erwarten. Dies ist Grund genug, ein Kriterium für die Gültigkeit von $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ zu erarbeiten. Nunmehriger Satz bereitet darauf vor. Die Beweis-Reihenfolge ist `g) - h) - c) - d) - e) - f) - a) - b)`:

113-6(Satz)

`a)` $x\cdot(y\cdot z)$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))) \\ +\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)) \\ +(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))).$$

`b)` $(x\cdot y)\cdot z$
$$= (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) \\ -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z) \\ +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)).$$

`c)` $\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z))$
$$= (\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)).$$

`d)` $\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))$
$$= (\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)) \\ +(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)).$$

`e)` $\mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) \\ -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z).$$

`f)` $\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z) \\ +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z).$$

`g)` $x\cdot(y\cdot z)=\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z))+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))$.

`h)` $(x\cdot y)\cdot z=\mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **113-6** `gh)`

`1.g)`: Via **96-26** gilt: $x \cdot (y \cdot z) = \mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z))$.

`1.h)`: Via **96-26** gilt: $(x \cdot y) \cdot z = \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z)$.

`c)`

`1`:
$$\begin{aligned} &\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(y \cdot z) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y \cdot z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y \cdot z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) \\ &\quad -(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)). \end{aligned}$$

`2`: Aus `1` folgt:
$$\begin{aligned} \mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) &= (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) \\ &\quad -(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)). \end{aligned}$$

`d)`

`1`:
$$\begin{aligned} &\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(y \cdot z) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(y \cdot z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(y \cdot z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \\ &\quad +(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)). \end{aligned}$$

`2`: Aus `1` folgt:
$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) &= (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \\ &\quad +(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)). \end{aligned}$$

`e)`

`1`:
$$\begin{aligned} &\mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot y) \cdot (\mathsf{Re}z) - \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot (\mathsf{Im}z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - \mathsf{Im}(x \cdot y) \cdot (\mathsf{Im}z) \\ &\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\ &\quad -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z). \end{aligned}$$

`2`: Aus `1` folgt:
$$\begin{aligned} \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z) &= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\ &\quad -((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z). \end{aligned}$$

<u>Beweis **113-6**</u> `f)`

`1:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x\cdot y)\cdot(\mathsf{Im}z)+\mathsf{Im}(x\cdot y)\cdot(\mathsf{Re}z)\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+\mathsf{Im}(x\cdot y)\cdot(\mathsf{Re}z)\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)\\
&\qquad+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z).
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z) &= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)\\
&\quad+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z).
\end{aligned}$$

`a)`

`1:`
$$\begin{aligned}
&x\cdot(y\cdot z)\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z))+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))\\
&\overset{\text{c)}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\qquad-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))\\
&\qquad+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))\\
&\overset{\text{d)}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\qquad-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))\\
&\quad+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))\\
&\qquad+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))).
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$\begin{aligned}
x\cdot(y\cdot z) &= ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\quad-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))\\
&\quad+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))\\
&\quad+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))).
\end{aligned}$$

<u>Beweis **113-6** `b)`</u>

`1:`

$$
\begin{aligned}
&(x\cdot y)\cdot z\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)\\
&\stackrel{\texttt{e)}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)\\
&\qquad -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\qquad +\mathsf{i}\cdot\mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)\\
&\stackrel{\texttt{f)}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)\\
&\qquad -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\quad +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)\\
&\qquad +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)).
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$
\begin{aligned}
(x\cdot y)\cdot z &= (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)\\
&\qquad -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))\\
&\quad +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)\\
&\qquad +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)).
\end{aligned}
$$

□

113-7. Nun wird ein "Re, Im-basiertes" Kriterium für "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$" gegeben:

113-7(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`ii)` "$\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot y))$" *und* "$\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot y)$".

`iii)` "$$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) - (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$$"

und

"$$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Im}z) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **113-7** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$"
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z)$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$"
folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z)$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z)) \wedge (\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) = \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z))$.

Beweis **113-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $(\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z)) = \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)) \wedge (\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z)) = \mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z))$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt: $\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z)) = \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)$.

`1.2:` Aus `VS`
folgt: $\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z)) = \mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)$.

`2.1:` $$(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} \mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z))$$
$$\stackrel{1.1}{=} \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)$$
$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z).$$

`2.2:` $$(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} \mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))$$
$$\stackrel{1.2}{=} \mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)$$
$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z) +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z).$$

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$\wedge$

$$((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)).$$

Beweis **113-7** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$
$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$
$\wedge((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$
$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$.

`1.1:` Aus `VS`
folgt:

$$(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z).$$

`1.2:` Aus `VS`
folgt:

$$(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$$
$$= ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z).$$

`2:`

$$x\cdot(y\cdot z)$$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)) -(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$
$$+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)) +(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{1.1}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$
$$+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)) +(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{1.2}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$
$$+\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z) +((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} (x\cdot y)\cdot z.$$

`3:` Aus 2
folgt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$

□

113-8. Nun wird der erste von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ bewiesen:

<u>**113-8(Satz)**</u>

a) $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

b) $(\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan}$.

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **113-8**</u>

1.1: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

1.2: $(\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

2.a): Aus 1.1
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

2.b): Aus 1.2
folgt: $(\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

3.c): Aus 2.a) und
aus 2.b)
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan}$.

□

113-9. Nun wird der zweite von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ bewiesen:

113-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan}$.

b) $\mathsf{nan} \cdot (x \cdot \mathsf{nan}) = (\mathsf{nan} \cdot x) \cdot \mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot x) = (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **113-9** `a)`

`1:` Es gilt: $(x=0)\vee(0\neq x)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x=0$.

`2:` $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=}0\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{97-5}}{=}0\cdot\mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(0\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}\stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0\neq x$.

`2:` Aus `1.2.Fall` “$0\neq x$” und
aus →) “$x\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x\cdot\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

`3:` $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{97-5}}{=}x\cdot\mathsf{nan}\stackrel{2}{=}\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-5}}{=}\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\stackrel{2}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

Beweis **113-9** `b)`

`1:` Es gilt: $(x=0)\vee(0\neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x=0$.

`2:` $\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})\stackrel{\texttt{1.1.Fall}}{=}\mathsf{nan}\cdot(0\cdot\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}\cdot 0\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}0\cdot\mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(\mathsf{nan}\cdot 0)\cdot\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{1.1.Fall}}{=}(\mathsf{nan}\cdot x)\cdot\mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})=(\mathsf{nan}\cdot x)\cdot\mathsf{nan}$.

`1.2.Fall` $0\neq x$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$0\neq x$” und
aus →) “$x\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x\cdot\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$0\neq x$” und
aus →) “$x\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan}\cdot x=\mathsf{nan}$.

`3:` $\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})\stackrel{2.1}{=}\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}\stackrel{2.2}{=}(\mathsf{nan}\cdot x)\cdot\mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})=(\mathsf{nan}\cdot x)\cdot\mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})=(\mathsf{nan}\cdot x)\cdot\mathsf{nan}$.

`c)`

`1:` Aus →) “$x\in\mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}$.

`2:` $(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\cdot x\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}x\cdot(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\stackrel{1}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\mathsf{nan}\cdot(x\cdot\mathsf{nan})$
$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}\cdot x)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan})\cdot x=\mathsf{nan}\cdot(\mathsf{nan}\cdot x)$.

□

113-10. Im nun zu beweisenden dritten von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ sind bereits zwei mal vier gleich acht Fälle zu unterscheiden:

113-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

b) $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

c) $\mathsf{nan} \cdot (x \cdot y) = (\mathsf{nan} \cdot x) \cdot y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **113-10** a)

1: Es gilt:

$$(x = 0) \wedge (y = 0)$$
$$\vee \quad (x = 0) \wedge (0 \neq y)$$
$$\vee \quad (0 \neq x) \wedge (y = 0)$$
$$\vee \quad (0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

2.1: Aus `1.1.Fall` folgt: $x = 0$.

2.2: Aus `1.1.Fall` folgt: $y = 0$.

3: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{2.1}{=} 0 \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{2.2}{=} 0 \cdot (0 \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{98-16}}{=} (0 \cdot 0) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} (x \cdot 0) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.2}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

4: Aus 3 folgt: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

...

<u>Beweis</u> **113-10** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (0 \neq y).$

`2.1:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $x = 0.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots 0 \neq y$" und
aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $y \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`2.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via ∈**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `2.3`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0.$

`4:` $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{2.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3}{=} (0 \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(0 \neq x) \wedge (y = 0).$

`2.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via ∈**SZ**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`
folgt: $y = 0.$

`3:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

`4:` $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{2.2}{=} x \cdot (0 \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot 0 \stackrel{3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3}{=} (x \cdot 0) \cdot \mathsf{nan}$
$\stackrel{2.2}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

...

Beweis **113-10** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y).$

`2.1:` Aus `1.4.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`2.2:` Aus `1.4.Fall`“$\ldots 0 \neq y$” und
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $y \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`2.3:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” ,
aus →) “$y \in \mathbb{T}$” ,
aus `1.4.Fall`“$0 \neq x \ldots$” und
aus `1.4.Fall`“$\ldots 0 \neq y$”
folgt via **111-3**: $0 \neq x \cdot y.$

`2.4:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via ·**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}.$

`3:` Aus `2.3`“$0 \neq x \cdot y$” und
aus `2.4`“$x \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $(x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$

`4:` $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{2.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}.$

<u>Beweis **113-10**</u> `b)`

`1:` Es gilt:

$$(x=0)\wedge(y=0)$$
$$\vee\quad (x=0)\wedge(0\neq y)$$
$$\vee\quad (0\neq x)\wedge(y=0)$$
$$\vee\quad (0\neq x)\wedge(0\neq y).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x=0)\wedge(y=0).$

`2.1:` Aus `1.1.Fall` folgt: $x=0.$

`2.2:` Aus `1.1.Fall` folgt: $y=0.$

`3:` $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot y)\stackrel{2.1}{=}0\cdot(\mathsf{nan}\cdot y)\stackrel{2.2}{=}0\cdot(\mathsf{nan}\cdot 0)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}0\cdot 0\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(0\cdot\mathsf{nan})\cdot 0$
$\stackrel{2.1}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot 0\stackrel{2.2}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot y.$

`4:` Aus `3` folgt: $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot y)=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot y.$

`1.2.Fall` $(x=0)\wedge(0\neq y).$

`2.1:` Aus `1.2.Fall` folgt: $x=0.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$\ldots 0\neq y$" und aus →) "$y\in\mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan}\cdot y=\mathsf{nan}.$

`2.3:` Aus →) "$y\in\mathbb{T}$" folgt via ∈**SZ**: y Zahl.

`3:` Aus `2.3`"y Zahl" folgt via **FSM**0: $0\cdot y=0.$

`4:` $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot y)\stackrel{2.2}{=}x\cdot\mathsf{nan}\stackrel{2.1}{=}0\cdot\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}0\stackrel{3}{=}0\cdot y\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(0\cdot\mathsf{nan})\cdot y$
$\stackrel{2.1}{=}(x\cdot\mathsf{nan})\cdot y.$

`5:` Aus `4` folgt: $x\cdot(\mathsf{nan}\cdot y)=(x\cdot\mathsf{nan})\cdot y.$

...

Beweis **113-10** `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(0 \neq x) \wedge (y = 0)$.

`2.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$0 \neq x \ldots$" und
aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`2.3:` Aus `1.3.Fall`
folgt: $y = 0$.

`3:` Aus `2.1` "x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`4:` $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) \stackrel{2.3}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot 0) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot 0 \stackrel{3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot 0 \stackrel{2.2}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot 0$
$\stackrel{2.3}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

`1.4.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.1:` Aus `1.4.Fall` "$0 \neq x \ldots$" und
aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`2.2:` Aus `1.4.Fall` "$\ldots 0 \neq y$" und
aus →) "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y = \mathsf{nan}$.

`3:` $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) \stackrel{2.2}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{nan} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{nan} \cdot y \stackrel{2.1}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

<u>Beweis **113-10** `c)`</u>

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y$.

`2:` $\mathsf{nan} \cdot (x \cdot y) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{1.1}{=} x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot y)$
$\stackrel{1.2}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot y \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (\mathsf{nan} \cdot x) \cdot y$.

`3:` Aus 2
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (x \cdot y) = (\mathsf{nan} \cdot x) \cdot y$.

□

113-11. Im vierten von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ sind alle Faktoren gleich $+\infty$ oder gleich $-\infty$:

113-11(Satz)

a) $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) = ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty) = +\infty.$

b) $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) = ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty) = -\infty.$

c) $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) = ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty) = -\infty.$

d) $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) = ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty) = -\infty.$

e) $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) = ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty) = +\infty.$

f) $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) = ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty) = +\infty.$

g) $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) = ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty) = +\infty.$

h) $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) = ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty) = -\infty.$

RECH-**Notation**.

Beweis **113-11** a)

1: $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty).$

2: Aus 1 folgt: $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) = ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty).$

b)

1: $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty).$

2: Aus 1 folgt: $(+\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) = ((+\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty).$

c)

1: $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty).$

2: Aus 1 folgt: $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) = ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty).$

<u>Beweis</u> **113-11** `d)`

1: $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty).$

2: Aus 1
folgt: $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(+\infty)) = ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(+\infty).$

`e)`

1: $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$
$\overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty).$

2: Aus 1
folgt: $(+\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) = ((+\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty).$

`f)`

1: $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty).$

2: Aus 1
folgt: $(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty)) = ((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty).$

`g)`

1: $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$
$\overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty).$

2: Aus 1
folgt: $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty)) = ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty).$

`h)`

1: $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty)\cdot(+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty$
$\overset{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty)\cdot(-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty).$

2: Aus 1
folgt: $(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(-\infty)) = ((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(-\infty).$

$\square$

113-12. Nun wird der fünfte von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ bewiesen:

113-12(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

b) $x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)$.

c) $x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)$.

d) $x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty)$.

e) $(+\infty) \cdot (x \cdot (+\infty)) = ((+\infty) \cdot x) \cdot (+\infty)$.

f) $(+\infty) \cdot (x \cdot (-\infty)) = ((+\infty) \cdot x) \cdot (-\infty)$.

g) $(-\infty) \cdot (x \cdot (+\infty)) = ((-\infty) \cdot x) \cdot (+\infty)$.

h) $(-\infty) \cdot (x \cdot (-\infty)) = ((-\infty) \cdot x) \cdot (-\infty)$.

i) $(+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x$.

j) $(+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x) = ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x$.

k) $(-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x) = ((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x$.

l) $(-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x) = ((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **113-12**

$\leq$-Notation.

---

a)

1: Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < 0$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x < 0$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

3: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{2}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{2}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

`1.2.Fall` $x = 0$.

Aus `1.2.Fall` "$x = 0$"
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

`1.3.Fall` $0 < x$.

2: Aus `1.3.Fall` "$0 < x$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

3: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{2}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{2}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

Beweis **113-12** `bcd)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty).$$

`2.1:`
$$\begin{aligned}
& x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) \\
\overset{\mathbf{AAVI}}{=}\ & x \cdot ((+\infty) \cdot (-(+\infty))) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & x \cdot (-((+\infty) \cdot (+\infty))) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & -(x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty))) \\
\overset{1}{=}\ & -((x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & (x \cdot (+\infty)) \cdot (-(+\infty)) \\
\overset{\mathbf{AAVI}}{=}\ & (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).
\end{aligned}$$

`2.2:`
$$\begin{aligned}
& x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) \\
\overset{\mathbf{AAVI}}{=}\ & x \cdot ((-(+\infty)) \cdot (+\infty)) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & x \cdot (-((+\infty) \cdot (+\infty))) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & -(x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty))) \\
\overset{1}{=}\ & -((x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & (-(x \cdot (+\infty))) \cdot (+\infty) \\
\overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\ & (x \cdot (-(+\infty))) \cdot (+\infty) \\
\overset{\mathbf{AAVI}}{=}\ & (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty).
\end{aligned}$$

...

<u>Beweis **113-12**</u> `bcd)`

...

`2.3:`
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty))$$
$$\overset{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot (+\infty)$$
$$\overset{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty))$$
$$\overset{1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$$
$$\overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} (-(x \cdot (+\infty)) \cdot (-(+\infty))$$
$$\overset{\textbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot (-(+\infty))) \cdot (-(+\infty))$$
$$\overset{\textbf{AAVI}}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty).$$

`3.b):` Aus `2.1` folgt:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).$$

`3.c):` Aus `2.2` folgt:
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty).$$

`3.d):` Aus `2.3` folgt:
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty).$$

`e)`

`1:`
$$(+\infty) \cdot (x \cdot (+\infty)) \overset{\textbf{KGM}}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty) \overset{\textbf{KGM}}{=} ((+\infty) \cdot x) \cdot (+\infty).$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$(+\infty) \cdot (x \cdot (+\infty)) = ((+\infty) \cdot x) \cdot (+\infty).$$

<u>Beweis **113-12** `f)`</u>

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).$$

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty).$$

`2:`
$$\begin{aligned}
&(+\infty) \cdot (x \cdot (-\infty))\\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &(x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)\\
\stackrel{1.2}{=}\ &x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty))\\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty))\\
\stackrel{1.1}{=}\ &(x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)\\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot x) \cdot (-\infty).
\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(+\infty) \cdot (x \cdot (-\infty)) = ((+\infty) \cdot x) \cdot (-\infty).$$

<u>Beweis **113-12**</u> `g)`

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).$$

`1.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty).$$

`2:`
$$\begin{aligned}&(-\infty) \cdot (x \cdot (+\infty))\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &(x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)\\ \stackrel{1.1}{=}\ &x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty))\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty))\\ \stackrel{1.2}{=}\ &(x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &((-\infty) \cdot x) \cdot (+\infty).\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(-\infty) \cdot (x \cdot (+\infty)) = ((-\infty) \cdot x) \cdot (+\infty).$$

`h)`

`1:` $$(-\infty) \cdot (x \cdot (-\infty)) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((-\infty) \cdot x) \cdot (-\infty).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-\infty) \cdot (x \cdot (-\infty)) = ((-\infty) \cdot x) \cdot (-\infty).$$

`i)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty).$$

`2:`
$$\begin{aligned}&(+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x)\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot x) \cdot (+\infty)\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &(x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)\\ \stackrel{1}{=}\ &x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty))\\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x.\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x.$$

Beweis **113-12** `j)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty).$$

`2:`
$$\begin{aligned}
&(+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x)\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((-\infty) \cdot x) \cdot (+\infty)\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &(x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)\\
\stackrel{\mathtt{1}}{=}\ &x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty))\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x.
\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x) = ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x.$$

`k)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).$$

`2:`
$$\begin{aligned}
&(-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x)\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot x) \cdot (-\infty)\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &(x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)\\
\stackrel{\mathtt{1}}{=}\ &x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty))\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x\\
\stackrel{\textbf{KGM}}{=}\ &((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x.
\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot x) = ((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot x.$$

<u>Beweis **113-12** `l)`</u>

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty).$$

`2:`

$$\begin{aligned} &(-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} &((-\infty) \cdot x) \cdot (-\infty) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} &(x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \\ \stackrel{1}{=} &x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) \\ \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} &((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x. \end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $(-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot x) = ((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot x.$

□

113-13. Der Beweis des sechsten von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM$\mathbb{T}$** wird unter anderem mit Hilfe zwei mal neun gleich achtzehn Fallunterscheidungen geführt:

113-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

b) $x \cdot (y \cdot (-\infty)) = (x \cdot y) \cdot (-\infty)$.

c) $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

d) $x \cdot ((-\infty) \cdot y) = (x \cdot (-\infty)) \cdot y$.

e) $(+\infty) \cdot (x \cdot y) = ((+\infty) \cdot x) \cdot y$.

f) $(-\infty) \cdot (x \cdot y) = ((-\infty) \cdot x) \cdot y$.

RECH-**Notation**.

Beweis **113-13**

$\leq$-Notation.

---

a)

1.1: Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

1.2: Aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt:
$$\begin{array}{rl} & (x < 0) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x < 0) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x < 0) \wedge (0 < y) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x = 0) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y < 0) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y = 0) \\ \vee & (0 < x) \wedge (0 < y). \end{array}$$

Fallunterscheidung

2.1.Fall $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

3.1: Aus 2.1.Fall "$x < 0 \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

3.2: Aus 2.1.Fall "$\ldots y < 0$"
folgt via **107-22**: $y \cdot (+\infty) = -\infty$.

3.3: Aus 2.1.Fall "$x < 0 \ldots$" und
aus 2.1.Fall "$\ldots y < 0$"
folgt via **112-3**: $0 < x \cdot y$.

4: Aus 3.3 "$0 < x \cdot y$"
folgt via **107-22**: $(x \cdot y) \cdot (+\infty) = +\infty$.

5: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

6: Aus 5
folgt: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

...

Beweis **113-13** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.2.Fall}}$ $(x < 0) \wedge (y = 0)$.

Aus 2.2.Fall“$\ldots y = 0$”
folgt via **113-3**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

$\boxed{\texttt{2.3.Fall}}$ $(x < 0) \wedge (0 < y)$.

3.1: Aus 2.3.Fall“$x < 0 \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

3.2: Aus 2.3.Fall“$\ldots 0 < y$”
folgt via **107-22**: $y \cdot (+\infty) = +\infty$.

3.3: Aus 2.3.Fall“$x < 0 \ldots$” und
aus 2.3.Fall“$\ldots 0 < y$”
folgt via **112-2**: $x \cdot y < 0$.

4: Aus 3.3“$x \cdot y < 0$”
folgt via **107-22**: $(x \cdot y) \cdot (+\infty) = -\infty$.

5: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{4}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

6: Aus 5
folgt: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

$\boxed{\texttt{2.4.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (y < 0)$.

Aus 2.4.Fall“$x = 0 \ldots$”
folgt via **113-3**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

$\boxed{\texttt{2.5.Fall}}$ $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

Aus 2.5.Fall“$x = 0 \ldots$”
folgt via **113-3**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

...

<u>Beweis **113-13**</u> `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(x = 0) \wedge (0 < y)$.

Aus `2.6.Fall` "$x = 0 \ldots$"
folgt via **113-3**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`2.7.Fall` $(0 < x) \wedge (y < 0)$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall` "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall` "$\ldots y < 0$"
folgt via **107-22**: $y \cdot (+\infty) = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.7.Fall` "$0 < x \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$\ldots y < 0$"
folgt via **112-1**: $x \cdot y < 0$.

`4:` Aus `3.3` "$x \cdot y < 0$"
folgt via **107-22**: $(x \cdot y) \cdot (+\infty) = -\infty$.

`5:` $x \cdot (y \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{4}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`2.8.Fall` $(0 < x) \wedge (y = 0)$.

Aus `2.8.Fall` "$\ldots y = 0$"
folgt via **113-3**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

...

Beweis **113-13** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.9.Fall}}$ $(0 < y) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-22**: $y \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.9.Fall`"$0 < x \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot y$.

`4:` Aus `3.3`"$0 < x \cdot y$"
folgt via **107-22**: $(x \cdot y) \cdot (+\infty) = +\infty$.

`5:` $x \cdot (y \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`b)`

`1:` Aus →)"$x \in \mathbb{S}$" und
aus →)"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`2:`
$$x \cdot (y \cdot (-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (y \cdot (-(+\infty)))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot (-(y \cdot (+\infty)))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (y \cdot (+\infty)))$$
$$\stackrel{1}{=} -((x \cdot y) \cdot (+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot y) \cdot (-(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $x \cdot (y \cdot (-\infty)) = (x \cdot y) \cdot (-\infty)$.

Beweis **113-13** `c)`

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(y < 0) \vee (y = 0) \vee (0 < y)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{ll} & (x < 0) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x < 0) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x < 0) \wedge (0 < y) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y < 0) \\ \vee & (x = 0) \wedge (y = 0) \\ \vee & (x = 0) \wedge (0 < y) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y < 0) \\ \vee & (0 < x) \wedge (y = 0) \\ \vee & (0 < x) \wedge (0 < y). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x < 0) \wedge (y < 0)$.

`3.1:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0 \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.1.Fall`"$x < 0 \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y < 0$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.1.Fall`"$\ldots y < 0$"
folgt via **107-22**: $(-\infty) \cdot y = +\infty$.

`4:` $x \cdot ((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} +\infty \stackrel{3.4}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.2.Fall` $(x < 0) \wedge (y = 0)$.

Aus `2.2.Fall`"$\ldots y = 0$"
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

...

Beweis **113-13** `c)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x < 0) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`"$x < 0\ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots 0 < y$"
folgt via **107-22**: $(-\infty) \cdot y = -\infty$.

`4:` $x \cdot ((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{3.3}{=} (-\infty) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.4.Fall` $(x = 0) \wedge (y < 0)$.

Aus `2.4.Fall`"$x = 0\ldots$"
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.5.Fall` $(x = 0) \wedge (y = 0)$.

Aus `2.5.Fall`"$x = 0\ldots$"
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.6.Fall` $(x = 0) \wedge (0 < y)$.

Aus `2.6.Fall`"$x = 0\ldots$"
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

...

Beweis **113-13** `c)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(0 < x) \wedge (y < 0)$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.7.Fall`“$\ldots y < 0$”
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = -\infty$.

`4:` $x \cdot ((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} -\infty \stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.8.Fall` $(0 < y) \wedge (y = 0)$.

Aus `2.8.Fall`“$\ldots y = 0$”
folgt via **113-3**: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`2.9.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`“$0 < x \ldots$”
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`“$\ldots 0 < y$”
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`4:` $x \cdot ((+\infty) \cdot y) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot y \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y$.

<u>Beweis **113-13** `d)`</u>

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y.$$

`2:`

$$x \cdot ((-\infty) \cdot y)$$
$$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot ((-(+\infty)) \cdot y)$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot (-((+\infty) \cdot y))$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot ((+\infty) \cdot y))$$
$$\stackrel{1}{=} -((x \cdot (+\infty)) \cdot y)$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} (-x \cdot (+\infty)) \cdot y$$
$$\stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} (x \cdot (-(+\infty))) \cdot y$$
$$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot y.$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$x \cdot ((-\infty) \cdot y) = (x \cdot (-\infty)) \cdot y.$$

<u>Beweis **113-13**</u> `e)`

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty).$

`1.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \cdot ((+\infty) \cdot y) = (x \cdot (+\infty)) \cdot y.$

`2:`
$$\begin{aligned}
&(+\infty) \cdot (x \cdot y) \\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\; &(x \cdot y) \cdot (+\infty) \\
\stackrel{1.1}{=}\; &x \cdot (y \cdot (+\infty)) \\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\; &x \cdot ((+\infty) \cdot y) \\
\stackrel{1.2}{=}\; &(x \cdot (+\infty)) \cdot y \\
\stackrel{\mathbf{KGM}}{=}\; &((+\infty) \cdot x) \cdot y.
\end{aligned}$$

`3:` Aus 2
folgt: $(+\infty) \cdot (x \cdot y) = ((+\infty) \cdot x) \cdot y.$

`f)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(+\infty) \cdot (x \cdot y) = ((+\infty) \cdot x) \cdot y.$

`2:`
$$\begin{aligned}
&(-\infty) \cdot (x \cdot y) \\
\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\; &(-(+\infty)) \cdot (x \cdot y) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\; &-((+\infty) \cdot (x \cdot y)) \\
\stackrel{1}{=}\; &-(((+\infty) \cdot x) \cdot y) \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\; &(-((+\infty) \cdot x)) \cdot y \\
\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}\; &((-(+\infty)) \cdot x) \cdot y \\
\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\; &((-\infty) \cdot x) \cdot y.
\end{aligned}$$

`3:` Aus 2
folgt: $(-\infty) \cdot (x \cdot y) = ((-\infty) \cdot x) \cdot y.$

$\square$

113-14. Der Beweis des siebenten von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ wird mit der rekordverdächtigen Anzahl von siebenundzwanzig Fallunterscheidungen geführt:

113-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{S}$.

$\rightarrow$) $z \in \mathbb{S}$.

Dann folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **113-14**</u>

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

`1.2:` Aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`1.3:` Aus →) "$z \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(z \in \mathbb{R}) \vee (z = +\infty) \vee (z = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$\begin{aligned}
& (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = -\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = +\infty) \\
\vee\ & (x = -\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`3.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-13**: $x \cdot (y \cdot (+\infty)) = (x \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \overset{3.1}{=} x \cdot (y \cdot (+\infty)) \overset{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \overset{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.3.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`3.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-13**: $x \cdot ((+\infty) \cdot z) = (x \cdot (+\infty)) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \overset{3.1}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot z) \overset{3.2}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot z \overset{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

<u>Beweis **113-14**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

3.1: Aus 2.4.Fall
folgt: $x = +\infty$.

3.2: Aus →) " $y \in \mathbb{S}$ " und
aus →) " $z \in \mathbb{S}$ "
folgt via **113-13**: $(+\infty) \cdot (y \cdot z) = ((+\infty) \cdot y) \cdot z$.

4: $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} ((+\infty) \cdot y) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.5.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty)$.

3.1: Aus 2.5.Fall
folgt: $z = -\infty$.

3.2: Aus →) " $x \in \mathbb{S}$ " und
aus →) " $y \in \mathbb{S}$ "
folgt via **113-13**: $x \cdot (y \cdot (-\infty)) = (x \cdot y) \cdot (-\infty)$.

4: $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (y \cdot (-\infty)) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.6.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

3.1: Aus 2.6.Fall
folgt: $y = -\infty$.

3.2: Aus →) " $x \in \mathbb{S}$ " und
aus →) " $z \in \mathbb{S}$ "
folgt via **113-13**: $x \cdot ((-\infty) \cdot z) = (x \cdot (-\infty)) \cdot z$.

4: $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus →) “$y \in \mathbb{S}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{S}$”
folgt via **113-13**: $(-\infty) \cdot (y \cdot z) = ((-\infty) \cdot y) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} ((-\infty) \cdot y) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.8.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`3.3:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **113-12**: $x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.9.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty).$

`3.1:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $z = +\infty.$

`3.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-12**: $(+\infty) \cdot (y \cdot (+\infty)) = ((+\infty) \cdot y) \cdot (+\infty).$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot (+\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} ((+\infty) \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

`2.10.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}).$

`3.1:` Aus `2.10.Fall`
folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.10.Fall`
folgt: $y = +\infty.$

`3.3:` Aus →) "$z \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-12**: $(+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) = ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot z.$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z)$
$\stackrel{3.3}{=} ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot z \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.11.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = -\infty).$

`3.1:` Aus `2.11.Fall`
folgt: $y = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.11.Fall`
folgt: $z = -\infty.$

`3.3:` Aus →) “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **113-12**: $x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty).$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty)) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

`2.12.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty).$

`3.1:` Aus `2.12.Fall`
folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.12.Fall`
folgt: $z = -\infty.$

`3.3:` Aus →) “$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **113-12**: $(+\infty) \cdot (y \cdot (-\infty)) = ((+\infty) \cdot y) \cdot (-\infty).$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot (-\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} ((+\infty) \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

...

<u>Beweis **113-14**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.13.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.13.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.13.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`3.3:` Aus →) "$z \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-12**: $(+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) = ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z)$
$\stackrel{3.3}{=} ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot z \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.14.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.14.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.14.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`3.3:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **113-12**: $x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.15.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.15.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.15.Fall` folgt: $z = +\infty$.

`3.3:` Aus →) “ $y \in \mathbb{S}$ ” folgt via **113-12**: $(-\infty) \cdot (y \cdot (+\infty)) = ((-\infty) \cdot y) \cdot (+\infty)$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} ((-\infty) \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$\boxed{\texttt{2.16.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.16.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.16.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`3.3:` Aus →) “ $z \in \mathbb{S}$ ” folgt via **113-12**: $(-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) = ((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} ((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot z \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.17.Fall}}$ $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty).$

`3.1:` Aus `2.17.Fall` folgt: $y = -\infty.$

`3.2:` Aus `2.17.Fall` folgt: $z = -\infty.$

`3.3:` Aus →) "$x \in \mathbb{S}$" folgt via **113-12**: $x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) = (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty).$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

$\boxed{\texttt{2.18.Fall}}$ $(x = -\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty).$

`3.1:` Aus `2.18.Fall` folgt: $x = -\infty.$

`3.2:` Aus `2.18.Fall` folgt: $z = -\infty.$

`3.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{S}$" folgt via **113-12**: $(-\infty) \cdot (y \cdot (-\infty)) = ((-\infty) \cdot y) \cdot (-\infty).$

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot (-\infty)) \stackrel{3.3}{=} ((-\infty) \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.19.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.19.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.19.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`3.3:` Aus →) “ $z \in \mathbb{S}$ ” folgt via **113-12**: $(-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) = ((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} ((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot z \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.20.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.20.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.20.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.20.Fall` folgt: $z = +\infty$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

Fallunterscheidung

...

2.21.Fall $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = -\infty).$

3.1: Aus 2.21.Fall
folgt: $x = +\infty.$

3.2: Aus 2.21.Fall
folgt: $y = +\infty.$

3.3: Aus 2.21.Fall
folgt: $z = -\infty.$

4: $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) \cdot (-\infty))$
$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((+\infty) \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (-\infty)$
$\stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

2.22.Fall $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = +\infty).$

3.1: Aus 2.22.Fall
folgt: $x = +\infty.$

3.2: Aus 2.22.Fall
folgt: $y = -\infty.$

3.3: Aus 2.22.Fall
folgt: $z = +\infty.$

4: $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot (+\infty))$
$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (+\infty)$
$\stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.23.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.23.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.23.Fall` folgt: $y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.23.Fall` folgt: $z = +\infty$.

`4:` $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (-\infty) \cdot ((+\infty) \cdot (+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((-\infty) \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) \cdot (+\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

`5:` Aus 4 folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.24.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.24.Fall` folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.24.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.24.Fall` folgt: $z = -\infty$.

`4:` $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((+\infty) \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

`5:` Aus 4 folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

<u>Beweis **113-14**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.25.Fall` $(x=-\infty)\wedge(y=+\infty)\wedge(z=-\infty)$.

`3.1:` Aus `2.25.Fall` folgt: $x=-\infty$.

`3.2:` Aus `2.25.Fall` folgt: $y=+\infty$.

`3.3:` Aus `2.25.Fall` folgt: $z=-\infty$.

`4:` $$x\cdot(y\cdot z)\stackrel{3.1}{=}(-\infty)\cdot(y\cdot z)\stackrel{3.2}{=}(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot z)\stackrel{3.3}{=}(-\infty)\cdot((+\infty)\cdot(-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=}((-\infty)\cdot(+\infty))\cdot(-\infty)\stackrel{3.1}{=}(x\cdot(+\infty))\cdot(-\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=}(x\cdot y)\cdot(-\infty)\stackrel{3.3}{=}(x\cdot y)\cdot z.$$

`5:` Aus `4` folgt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

`2.26.Fall` $(x=-\infty)\wedge(y=-\infty)\wedge(z=+\infty)$.

`3.1:` Aus `2.26.Fall` folgt: $x=-\infty$.

`3.2:` Aus `2.26.Fall` folgt: $y=-\infty$.

`3.3:` Aus `2.26.Fall` folgt: $z=+\infty$.

`4:` $$x\cdot(y\cdot z)\stackrel{3.1}{=}(-\infty)\cdot(y\cdot z)\stackrel{3.2}{=}(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot z)\stackrel{3.3}{=}(-\infty)\cdot((-\infty)\cdot(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{113-11}}{=}((-\infty)\cdot(-\infty))\cdot(+\infty)\stackrel{3.1}{=}(x\cdot(-\infty))\cdot(+\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=}(x\cdot y)\cdot(+\infty)\stackrel{3.3}{=}(x\cdot y)\cdot z.$$

`5:` Aus `4` folgt: $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$.

...

Beweis **113-14**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.27.Fall` $(x = -\infty) \wedge (y = -\infty) \wedge (z = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.27.Fall` folgt: $x = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.27.Fall` folgt: $y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.27.Fall` folgt: $z = -\infty$.

`4:` $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (-\infty) \cdot ((-\infty) \cdot (-\infty)) \stackrel{\mathbf{113-11}}{=} ((-\infty) \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (-\infty)) \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

`5:` Aus 4 folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

□

113-15. Im achten von acht HilfsSätzen auf dem Weg zum **AGM**$\mathbb{T}$ wird $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ für alle treellen Zahlen x, y, z etabliert. Interessanter Weise ist dies *nicht* **AGM**$\mathbb{T}$:

113-15(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow$) $z \in \mathbb{T}$.

Dann folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **113-15**

`1.1`: Aus →) “ $x \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.2`: Aus →) “ $y \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`1.3`: Aus →) “ $z \in \mathbb{T}$ ”
folgt via **95-16**: $(z \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`2`: Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan}) \\ \vee & (x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan}). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall` “ $x \in \mathbb{S} \ldots$ ”,
aus `2.1.Fall` “ $\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$ ” und
aus `2.1.Fall` “ $\ldots z \in \mathbb{S}$ ”
folgt via **113-14**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

<u>Beweis **113-15**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-10**: $x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.3.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-10**: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.4.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus →) “$y \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-10**: $\mathsf{nan} \cdot (y \cdot z) = (\mathsf{nan} \cdot y) \cdot z$.

`4:` $x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} (\mathsf{nan} \cdot y) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-15**

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.5.Fall` $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall` folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$" folgt via **113-9**: $x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) = (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

`5:` Aus 4 folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`2.6.Fall` $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall` folgt: $x = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall` folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$" folgt via **113-9**: $\mathsf{nan} \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) = (\mathsf{nan} \cdot y) \cdot \mathsf{nan}$.

`4:` $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot (y \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{3.3}{=} (\mathsf{nan} \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

`5:` Aus 4 folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

...

Beweis **113-15**

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.7.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

3.1: Aus 2.7.Fall
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2.7.Fall
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

3.3: Aus →) “$z \in \mathbb{T}$”
folgt via **113-9**: $\mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) = (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot z$.

4: $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) \stackrel{3.3}{=} (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot z \stackrel{3.1}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot z \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$\boxed{\texttt{2.8.Fall}}$ $(x = \mathsf{nan}) \wedge (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

3.1: Aus 2.8.Fall
folgt: $x = \mathsf{nan}$.

3.2: Aus 2.8.Fall
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

3.3: Aus 2.8.Fall
folgt: $z = \mathsf{nan}$.

4: $$x \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} \cdot (y \cdot z) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot z) \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} \cdot (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{113-8}}{=} (\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (x \cdot \mathsf{nan}) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) \cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

□

113-16. Nach einigen Vorbereitungen wird nun das **AssoziativGesetz Multiplikation** $\mathbb{T}$ bewiesen, in dem interessanter Weise keine Forderungen an y erhoben werden. Auch *dieser* Beweis beruht auf Fallunterscheidungen:

113-16(Satz) (AGM$\mathbb{T}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{T}$)

Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$z \in \mathbb{T}$" folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$".

RECH-**Notation**.

Beweis **113-16** VS gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

1.1: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}x = 0$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}z = 0$.

1.3: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

1.4: Aus VS gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

2.1: Aus 1.3"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

2.2: Aus 1.4"z Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$.

3: Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

...

<u>Beweis **113-16**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

`4:` Aus `3.1.Fall`“y Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \text{ Zahl})$.

`5.1:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$.

`5.2:` Aus `2.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” und
aus `4`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$.

`5.3:` Aus `4`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) \in \mathbb{T}$.

`5.4:` Aus `4`“$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T} \ldots$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z) \in \mathbb{T}$.

...

...

Beweis **113-16** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

...

`6.1:` Aus `4`"... $\mathsf{Re}y$ Zahl... "
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Re}y) \cdot 0 = 0$.

`6.2:` Aus `4`"... $\mathsf{Re}y$ Zahl... "
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Re}y) = 0$.

`6.3:` Aus `4`"... $\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}y) \cdot 0 = 0$.

`6.4:` Aus `4`"... $\mathsf{Im}y$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (\mathsf{Im}y) = 0$.

`6.5:` Aus `5.3`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$ Zahl.

`6.6:` Aus `5.4`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$ Zahl.

`6.7:` Aus `5.5`"$(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)$ Zahl.

`6.8:` Aus `5.6`"$(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z) \in \mathbb{T}$"
folgt via $\in$**SZ**: $(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)$ Zahl.

`7.1:` Aus `6.5`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot 0 = 0$.

`7.2:` Aus `6.6`"$(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot 0 = 0$.

`7.3:` Aus `6.7`"$(\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = 0$.

`7.4:` Aus `6.8`"$(\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = 0$.

...

...

<u>Beweis **113-16**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

...

`8.1:` $\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z))$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) - (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{1.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) - 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot 0) - 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot 0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{6.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - 0) - 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot 0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{6.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - 0) - 0 \cdot (0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) + 0) - 0 \cdot (0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) - 0 \cdot (0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) - 0 \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{7.4}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) - 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)).$$

`8.2:` $\mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z)$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$$

$$\stackrel{1.1}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$$

$$\stackrel{1.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot 0$$

$$\stackrel{6.4}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot 0$$

$$\stackrel{6.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + 0) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot 0$$

$$\stackrel{7.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) - 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) + 0$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z).$$

...

...

Beweis **113-16** `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

...

`8.3:` $\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z))$

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathbf{113-6}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \\
&\qquad + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) \\
&\overset{1.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) \\
&\overset{1.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot 0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot 0) \\
&\overset{6.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot 0) \\
&\overset{6.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (0 + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - 0) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - 0) \\
&\overset{\mathbf{98-15}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) + 0) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \\
&\overset{7.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) + 0 \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)).
\end{aligned}$$

`8.4:` $\mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z)$

$$\begin{aligned}
&\overset{\mathbf{113-6}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Im}z) \\
&\qquad + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{1.1}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Im}z) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{1.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0 \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{6.4}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0 \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{6.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - 0) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{\mathbf{98-15}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + 0) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + 0) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{7.1}{=} 0 + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \\
&\overset{\mathbf{98-12}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z).
\end{aligned}$$

...

...

<u>Beweis **113-16**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` y Zahl.

...

`9.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$",
aus `4`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `2.2`"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **113-15**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

`9.2:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$",
aus `4`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `2.2`"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **113-15**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

`10.1:` $\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) \stackrel{8.1}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \stackrel{9.1}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \stackrel{8.2}{=} \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z)$.

`10.1:` $\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) \stackrel{8.3}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) \stackrel{9.2}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z) \stackrel{8.4}{=} \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z)$.

`11:` Aus `10.1`"$\mathsf{Re}(x \cdot (y \cdot z)) = \ldots = \mathsf{Re}((x \cdot y) \cdot z)$" und
aus `10.2`"$\mathsf{Im}(x \cdot (y \cdot z)) = \ldots = \mathsf{Im}((x \cdot y) \cdot z)$"
folgt via **113-7**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$.

`3.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

Aus `3.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **113-1**: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$\square$

113-17. Zur Vereinfachung späteren Zitierens wird nun **AGM**$\mathbb{R}$ bewiesen:

113-17(Satz) (AGM$\mathbb{R}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{R}$)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$z \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **113-17** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.2`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

□

113-18. Das **AGM**$\mathbb{T}$ bietet in Kombination mit dem **KGM** eine Unzahl an Möglichkeiten, mehrfache Produkte umzustellen. Hierzu zwei Manipulationen:

113-18(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{T}$.

→) $y \in \mathbb{T}$.

→) $z \in \mathbb{T}$.

→) $w \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)$.

b) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$.

RECH-**Notation**.

Beweis **113-18** `a)`

`1.1:` Aus →) "$z \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$w \in \mathbb{T}$"
folgt via ·**SZ**: $z \cdot w \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus →) "$w \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{T}$"
folgt via ·**SZ**: $w \cdot z \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$w \in \mathbb{T}$"
folgt via ·**SZ**: $y \cdot w \in \mathbb{T}$.

`1.4:` Aus →) "$y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $y \cdot (w \cdot z) = (y \cdot w) \cdot z$.

`2.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1` "$z \cdot w \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $x \cdot (y \cdot (z \cdot w)) = (x \cdot y) \cdot (z \cdot w)$.

`2.2:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.3` "$y \cdot w \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{T}$: $x \cdot (z \cdot (y \cdot w)) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)$.

`3:` $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) \overset{2.1}{=} x \cdot (y \cdot (z \cdot w)) \overset{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (y \cdot (w \cdot z)) \overset{1.4}{=} x \cdot ((y \cdot w) \cdot z)$
$\overset{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (z \cdot (y \cdot w)) \overset{2.2}{=} (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)$.

<u>Beweis **113-18**</u> `b)`

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{T}$”,
aus →) “$y \in \mathbb{T}$”,
aus →) “$w \in \mathbb{T}$” und
aus →) “$z \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \cdot y) \cdot (w \cdot z) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z).$

`2:` Via **KGM** gilt: $w \cdot z = z \cdot w.$

`3:` Aus `1`“$(x \cdot y) \cdot (w \cdot z) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$” und
aus `2`“$w \cdot z = z \cdot w$”
folgt: $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z).$

□

Kein allgemeines DistributivGesetz.
Kein DistributivGesetz $\mathbb{A}$.
Kein DistributivGesetz $\mathbb{SR}$.
DG$\mathbb{C}$: DistributivGesetze $\mathbb{C}$.
DG$\mathbb{R}$: DistributivGesetze $\mathbb{R}$.
AGM$\mathbb{C}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{C}$.
Kein AssoziativGesetz Multiplikation in $\mathbb{B}$.

Ersterstellung: 20/07/05 **Letzte Änderung: 11/02/12**

114-1. Das nunmehrige Resultat ist der erste von drei HilfsSätzen zum Beweis von **DG**$\mathbb{C}$:

114-1(Satz)

Aus "$0 < x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{S}$" und "$z \in \mathbb{S}$"
folgt "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$".

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

Beweis **114-1** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(z \in \mathbb{R}) \vee (z = +\infty) \vee (z = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty)\\
\vee\ &(y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty)\\
\vee\ &(y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(y = +\infty) \wedge (z = +\infty)\\
\vee\ &(y = +\infty) \wedge (z = -\infty)\\
\vee\ &(y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})\\
\vee\ &(y = -\infty) \wedge (z = +\infty)\\
\vee\ &(y = -\infty) \wedge (z = -\infty).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **114-1** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall` "$y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2.2.Fall` $(y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall` "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall` "$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $y + (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`4:` Aus `3.2` "$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot y + (+\infty) = +\infty$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot (y + (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} x \cdot y + (+\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-1**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(y \in \mathbb{R}) \wedge (z = -\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $y + (-\infty) = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $z = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot y + (-\infty) = -\infty$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot (y + (-\infty)) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{4}{=} x \cdot y + (-\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot (-\infty) \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-1**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.4.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot z \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + z = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + x \cdot z = +\infty$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot ((+\infty) + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} (+\infty) + x \cdot z$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (+\infty) + x \cdot z \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2.5.Fall` $(y = +\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`4:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((+\infty) + z)$
$\stackrel{3.3}{=} x \cdot ((+\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (+\infty) + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.2}{=} x \cdot y + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-1**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.6.Fall}}$ $(y = +\infty) \wedge (z = -\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.5:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`3.6:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $z = -\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$0 \neq x$" und
aus `3.2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.5}{=} x \cdot ((+\infty) + z) \stackrel{3.6}{=} x \cdot ((+\infty) + (-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot \mathsf{nan}$
$\stackrel{4}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (+\infty) + (-\infty)$
$\stackrel{3.4}{=} x \cdot (+\infty) + x \cdot (-\infty) \stackrel{3.5}{=} x \cdot y + x \cdot (-\infty) \stackrel{3.6}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-1** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(y = -\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.7.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot z \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.7.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + z = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + x \cdot z = -\infty$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot ((-\infty) + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{4}{=} (-\infty) + x \cdot z$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (-\infty) + x \cdot z \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-1** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(y = -\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = -\infty$.

`3.5:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`3.6:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`4:` Aus `3.1`"$0 \neq x$" und
aus `3.2`"$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.5}{=} x \cdot ((-\infty) + z) \stackrel{3.6}{=} x \cdot ((-\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot \mathsf{nan}$
$\stackrel{4}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{3.4}{=} x \cdot (-\infty) + (+\infty)$
$\stackrel{3.3}{=} x \cdot (-\infty) + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.5}{=} x \cdot y + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.6}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-1**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.9.Fall` $(y = -\infty) \wedge (z = -\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $y = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $z = -\infty$.

`4:` $x \cdot (y + z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((-\infty) + z)$
$\stackrel{3.3}{=} x \cdot ((-\infty) + (-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (-\infty) \stackrel{3.1}{=} -\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (-\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (-\infty) + x \cdot (-\infty) \stackrel{3.2}{=} x \cdot y + x \cdot (-\infty) \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

$\square$

114-2. Im zweiten von drei HilfsSätzen für den Beweis von **DG**$\mathbb{C}$ wird nun fest gestellt, dass aus $x \in \mathbb{R}$ und $y, z \in \mathbb{S}$ die Gleichung $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ folgt:

114-2(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{S}$" und "$z \in \mathbb{S}$" folgt "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **114-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

$\leq$-**Notation**.

`1`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{S}$.

`2`: Aus `1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-18**: $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x < 0$.

`3.1`: Aus `2.1.Fall`"$x < 0$"
folgt via **109-16**: $0 < -x$.

`3.2`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-x \in \mathbb{R}$.

`4`: Aus `3.1`"$0 < -x$",
aus `3.2`"$-x \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via **114-1**: $(-x) \cdot (y + z) = (-x) \cdot y + (-x) \cdot z$.

`5`: $$x \cdot (y + z) \stackrel{\mathbf{100-4}}{=} -(-x \cdot (y + z)) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -((-x) \cdot (y + z)) \stackrel{4}{=} -((-x) \cdot y + (-x) \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -(-x \cdot y + (-x) \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=} -(-x \cdot y + (-x \cdot z)) = -(-x \cdot y - x \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

`6`: Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-2** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $x = 0$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

`4.1:` Aus `3.1`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`4.2:` Aus `3.2`"z Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot z = 0$.

`4.3:` Aus `3.1`"y Zahl" und
aus `3.2`"z Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $y + z$ Zahl.

`5:` Aus `4.3`"$y + z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (y + z) = 0$.

`6:` $x \cdot (y + z) \stackrel{\texttt{2.2.Fall}}{=} 0 \cdot (y + z) \stackrel{\texttt{5}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{\texttt{4.1}}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{\texttt{4.2}}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot z$
$\stackrel{\texttt{2.2.Fall}}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`7:` Aus `6`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2.3.Fall` $0 < x$.

Aus `2.3.Fall`"$0 < x$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via **114-1**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

□

114-3. Das folgende Beispiel vorwegnehmend wird hier fest gestellt, dass in **114-2** die Voraussetzung “$x \in \mathbb{R}$” entscheidend ist, da es weder ein allgemeines DistributivGesetz, noch ein DistributivGesetz in $\mathbb{A}$ noch ein DistributivGesetz in $\mathbb{SR}$ gibt:

114-3.Bemerkung

- Die Gleichung
  “$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \wedge (z \text{ Zahl})) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  “$((x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

114-4. Im nunmehrigen Beispiel wird klar gemacht, dass es kein allgemeines DistributivGesetz, kein DistributivGesetz $\mathbb{A}$ und auch kein DistributivGesetz $\mathbb{SR}$ - und damit natürlich auch kein DistributivGesetz XY mit $\mathbb{S} \subseteq X$ und $\mathbb{R} \subseteq Y$ - gibt:

<u>114-4.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x = +\infty$.

$\rightarrow$) $y = 1$.

$\rightarrow$) $z = -2$.

Dann folgt:

a) $x \in \mathbb{S}$.

b) $y \in \mathbb{R}$.

c) $z \in \mathbb{R}$.

d) $x \cdot y = +\infty$.

e) $x \cdot z = -\infty$.

f) $y + z = -1$.

g) $x \cdot (y + z) = -\infty$.

h) $x \cdot y + x \cdot z = \mathsf{nan}$.

i) $x \cdot (y + z) \neq x \cdot y + x \cdot z$.

114-5. Im dritten von drei HilfsSätzen zum Beweis von **DG**$\mathbb{C}$ wird nun fest gestellt, dass aus $x \in \mathbb{R}$ und $y, z \in \mathbb{T}$ die Gleichung $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ folgt:

114-5(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" *und* "$y \in \mathbb{T}$" *und* "$z \in \mathbb{T}$" *folgt* "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **114-5** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{S}) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-15**: $(z \in \mathbb{S}) \vee (z = \mathsf{nan})$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan}) \\ \vee & (y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S}) \\ \vee \quad & (y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan}). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(y \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `2.1.Fall` "$y \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via **114-2**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-5** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $y + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall` "$y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.2` "$x \cdot y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4` "$x \cdot y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot y + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $x = 0$.

`7:` Aus `2.2.Fall` "$y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`8:` Aus `7` "y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`9:` $$x \cdot (y + z) \stackrel{\texttt{6.1.Fall}}{=} 0 \cdot (y + z) \stackrel{3.3}{=} 0 \cdot (y + \mathsf{nan}) \stackrel{3.1}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{8}{=} 0 \cdot y \stackrel{\mathbf{98\text{-}12}}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{6.1.Fall}}{=} x \cdot y + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

`10:` Aus `9`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

...

<u>Beweis **114-5**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(y \in \mathbb{S}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $0 \neq x$.

7: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \dots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

8: Aus `6.2.Fall` "$0 \neq x$" und
aus 7 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

9: $x \cdot (y + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (y + \mathsf{nan}) \stackrel{3.1}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{8}{=} \mathsf{nan}$
$\stackrel{5}{=} x \cdot y + \mathsf{nan} \stackrel{8}{=} x \cdot y + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

10: Aus 9
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-5** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + z = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.3.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot z \in \mathbb{S}$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \cdot z \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`"$x \cdot z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + x \cdot z = \mathsf{nan}$.

`6:` Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $x = 0$.

`7:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

`8:` Aus `7`"z Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot z = 0$.

`9:` $$x \cdot (y + z) \overset{\texttt{6.1.Fall}}{=} 0 \cdot (y + z) \overset{\texttt{3.3}}{=} 0 \cdot (\mathsf{nan} + z) \overset{\texttt{3.1}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0 \overset{\texttt{8}}{=} 0 \cdot z \overset{\textbf{98-12}}{=} 0 + 0 \cdot z \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} + 0 \cdot z \overset{\texttt{6.1.Fall}}{=} x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot z \overset{\texttt{3.3}}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

`10:` Aus `9`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

...

<u>Beweis **114-5**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(y = \mathsf{nan}) \wedge (z \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $0 \neq x$.

7: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

8: Aus `6.2.Fall` "$0 \neq x$" und
aus 7 "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

9: $x \cdot (y + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{8}{=} \mathsf{nan}$
$\stackrel{5}{=} \mathsf{nan} + x \cdot z \stackrel{8}{=} x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot z \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

10: Aus 9
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-5**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(y = \mathsf{nan}) \wedge (z = \mathsf{nan})$.

`3.1`: Aus `2.4.Fall` folgt: $y = \mathsf{nan}$.

`3.2`: Aus `2.4.Fall` folgt: $z = \mathsf{nan}$.

`4`: Es gilt: $(x = 0) \vee (0 \neq x)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $x = 0$.

`5`: $x \cdot (y + z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathtt{4.1.Fall}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0 \cdot \mathsf{nan} + 0 \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathtt{4.1.Fall}}{=} x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6`: Aus `5` folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`4.2.Fall` $0 \neq x$.

`5`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`6`: Aus `4.2.Fall` "$0 \neq x$" und aus `5` "$x \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $x \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`7`: $x \cdot (y + z) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{6}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{6}{=} x \cdot \mathsf{nan} + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`8`: Aus `7` folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **114-5**</u> `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{T}) \wedge (z \in \mathbb{T})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

$\square$

114-6. Laut **DG$\mathbb{C}$** folgt bereits aus $x \in \mathbb{C}$ die Gleichung $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ und damit eng verknüpfte Gleichungen:

114-6(Satz) (DG$\mathbb{C}$: DistributivGesetze $\mathbb{C}$)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

b) $x \cdot (y-z) = x \cdot y - x \cdot z$.

c) $x \cdot (-y+z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

d) $x \cdot (-y-z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

e) $(-x) \cdot (y+z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

f) $(-x) \cdot (y-z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

g) $(-x) \cdot (-y+z) = x \cdot y - x \cdot z$.

h) $(-x) \cdot (-y-z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **114-6**

REIM-Notation.

---

a)

1: Es gilt: $y \notin \mathbb{A}$
$\vee \quad z \notin \mathbb{A}$
$\vee \quad (y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus `1.1.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $y + z = \mathcal{U}$.

2.2: Aus `1.1.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

3: $x \cdot (y + z) \stackrel{2.1}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + x \cdot z \stackrel{2.2}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`1.2.Fall` $z \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus `1.2.Fall` "$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $y + z = \mathcal{U}$.

2.2: Aus `1.2.Fall` "$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot z = \mathcal{U}$.

3: $x \cdot (y + z) \stackrel{2.1}{=} x \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} x \cdot y + \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

4: Aus 3
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **114-6** a)...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$y \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`2.3:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: z Zahl.

`3.1:` Aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{A}$"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}z \in \mathbb{T})$.

`4.1:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `3.1`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **114-5**:
$$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z).$$

`4.2:` Aus `2.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **114-5**:
$$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z).$$

`4.3:` Aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$",
aus `3.1`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **114-5**:
$$(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)) = (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z).$$

`4.4:` Aus `2.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.4`"$-\mathsf{Im}x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus `3.1`"$\ldots \mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2`"$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **114-5**:
$$(-\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) = (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z).$$

...

...

<u>Beweis</u> **114-6** a)...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

...

6: $x \cdot (y+z) \stackrel{\mathbf{96-26}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot (y+z)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot (y+z))$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot (y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z) - (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z))$$

$$= ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z) + (-(\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z) + (-\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Re}(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)) + (-\mathsf{Im}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)) + (-\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{4.1}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z)) + (-\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{5}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z)) + ((-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{4.2}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z)) + ((-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{4.3}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z)) + ((-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z)) + ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

...

...

Beweis **114-6** a) ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

...

6: $x \cdot (y + z) = \ldots =$

$$(((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=}$$

$$((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (-((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))))$$
$$+((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$= (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)))$$
$$+((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) + (-((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$= (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}z)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{Re}(x \cdot z))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{Re}(x \cdot z)) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}(x \cdot y) + ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{Re}(x \cdot z)) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}(x \cdot y) + \mathsf{Im}(x \cdot z))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

Beweis **114-6** `b)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y + (-z)) = x \cdot y + x \cdot (-z)$.

`2:` $x \cdot (y - z) = x \cdot (y + (-z)) \stackrel{1}{=} x \cdot y + x \cdot (-z) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot y + (-x \cdot z) = x \cdot y - x \cdot z$.

`3:` Aus 2
folgt: $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

`c)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot ((-y) + z) = x \cdot (-y) + x \cdot z$.

`2:` $x \cdot (-y + z) = x \cdot ((-y) + z) \stackrel{1}{=} x \cdot (-y) + x \cdot z \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -x \cdot y + x \cdot z$.

`3:` Aus 2
folgt: $x \cdot (-y + z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

`d)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2:` $x \cdot (-y - z) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} x \cdot (-(y + z)) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (y + z)) \stackrel{1}{=} -(x \cdot y + x \cdot z)$
$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -x \cdot y - x \cdot z$.

`3:` Aus 2
folgt: $x \cdot (-y - z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

`e)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2:` $(-x) \cdot (y + z) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (y + z)) \stackrel{1}{=} -(x \cdot y + x \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -x \cdot y - x \cdot z$.

`3:` Aus 2
folgt: $(-x) \cdot (y + z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

<u>Beweis **114-6**</u> `f)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $$x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z.$$

`2:` $$(-x) \cdot (y - z) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (y - z)) \stackrel{1}{=} -(x \cdot y - x \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -x \cdot y + x \cdot z.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(-x) \cdot (y - z) = -x \cdot y + x \cdot z.$$

`g)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $$x \cdot (-y + z) = -x \cdot y + x \cdot z.$$

`2:` $$(-x) \cdot (-y + z) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (-y + z)) \stackrel{1}{=} -(-x \cdot y + x \cdot z) \stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} x \cdot y - x \cdot z.$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(-x) \cdot (-y + z) = x \cdot y - x \cdot z.$$

`h)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$x \cdot ((-y) + (-z)) = x \cdot (-y) + x \cdot (-z).$$

`2:` $$\begin{aligned}(-x) \cdot (-y - z) &\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(x \cdot (-y - z)) = -(x \cdot (-y + (-z))) \\ &= -(x \cdot ((-y) + (-z))) \stackrel{1}{=} -(x \cdot (-y) + x \cdot (-z)) \\ &\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(-x \cdot y + x \cdot (-z)) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(-x \cdot y + (-x \cdot z)) = -(-x \cdot y - x \cdot z) \\ &\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} x \cdot y + x \cdot z.\end{aligned}$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(-x) \cdot (-y - z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

□

114-7. Zur Vereinfachung späteren Zitierens wird nun **DG**$\mathbb{R}$ bewiesen:

114-7(Satz) (DG$\mathbb{R}$: DistributivGesetze $\mathbb{R}$)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

b) $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

c) $x \cdot (-y + z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

d) $x \cdot (-y - z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

e) $(-x) \cdot (y + z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

f) $(-x) \cdot (y - z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

g) $(-x) \cdot (-y + z) = x \cdot y - x \cdot z$.

h) $(-x) \cdot (-y - z) = x \cdot y + x \cdot z$.

RECH-**Notation**.

Beweis **114-7**

`1:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via ∈**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`2.a):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2.b):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

`2.c):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $x \cdot (-y + z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

`2.d):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $x \cdot (-y - z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

`2.e):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $(-x) \cdot (y + z) = -x \cdot y - x \cdot z$.

`2.f):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $(-x) \cdot (y - z) = -x \cdot y + x \cdot z$.

`2.g):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $(-x) \cdot (-y + z) = x \cdot y - x \cdot z$.

`2.h):` Aus `1` “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **DG**$\mathbb{C}$: $(-x) \cdot (-y - z) = x \cdot y + x \cdot z$.

□

114-8. Mit Hilfe von **114-4(BSP)** kann leicht fest gestellt werden:

114-8.Bemerkung

- Die Aussage
  "$(x \in \mathbb{S}) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$(x \in \mathbb{T}) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$(x \in \mathbb{B}) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$(x \text{ Zahl}) \Rightarrow (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

114-9. Interessanter Weise muss im **AssoziativGesetz Multiplikation** $\mathbb{C}$ nur $x, z \in \mathbb{C}$ gefordert werden. y muss keine komplexe Zahl. y muss nicht einmal eine Zahl sein:

114-9(Satz) (AGM$\mathbb{C}$: AssoziativGesetz Multiplikation $\mathbb{C}$)

Aus "$x \in \mathbb{C}$" und "$z \in \mathbb{C}$" folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **114-9**

`REIM`-**Notation**.

`1.1`: Aus →) "$x \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{R})$.

`1.2`: Aus →) "$\ldots z \in \mathbb{C}$"
folgt via **101-1**: $(\mathsf{Re}z \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}z \in \mathbb{R})$.

`2.1`: Aus `1.1` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`2.2`: Aus `1.1` "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`2.3`: Aus `1.2` "$\mathsf{Re}z \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$.

`2.4`: Aus `1.2` "$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\in$**SZ**: $\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis</u> **114-9** ...

2.5: Aus 1.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z))$$
$$= (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) - (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)).$$

2.6: Aus 1.1 "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$
$$= (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)).$$

2.7: Aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z) - (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z))$$
$$= (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) - (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)).$$

2.8: Aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z) + (\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z))$$
$$= (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)).$$

2.9: Aus 1.2 "$\mathsf{Re}z \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))$$
$$= (\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) - (\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

2.10: Aus 1.2 "$\mathsf{Re}z \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$
$$= (\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Re}z) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

2.11: Aus 1.2 "$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))$$
$$= (\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) - (\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

2.12: Aus 1.2 "$\ldots \mathsf{Im}z \in \mathbb{R}$"
folgt via **DG**$\mathbb{R}$: $$(\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$$
$$= (\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}z) \cdot ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

...

Beweis **114-9** . . .

3.1: Aus 2.1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.3"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

3.2: Aus 2.1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.3"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

3.3: Aus 2.1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.4"$\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$.

3.4: Aus 2.1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.4"$\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Re}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$.

3.5: Aus 2.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.3"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

3.6: Aus 2.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.3"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Re}z)$.

3.7: Aus 2.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.4"$\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Re}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$.

3.8: Aus 2.2"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus 2.4"$\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AGM$\mathbb{T}$**: $(\mathsf{Im}x) \cdot ((\mathsf{Im}y) \cdot (\mathsf{Im}z)) = ((\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) \cdot (\mathsf{Im}z)$.

. . .

<u>Beweis</u> **114-9** ...

`4.1:` $\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z))$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{2.5}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z))-(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))) \\ -(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{2.8}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z))-(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))) \\ -((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{3.1}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))) \\ -((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{3.4}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{3.7}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{3.6}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)) \\ -(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ -(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ -((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ -((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} ((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) \\ -((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{2.9}{=} (\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) \\ -((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{2.12}{=} (\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

...

Beweis **114-9** . . .

4.1: $\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z)) = \ldots =$

$$((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z) -((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)$$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z).$$

4.2: $\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z))$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.6}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))) +(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.7}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))) +((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.3}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Re}z))) +((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.2}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)) +((\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)\cdot(\mathsf{Re}z))-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.5}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)) +(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)\cdot(\mathsf{Im}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.8}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)) +(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Re}z)) +(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) +(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)-((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) +((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y))) +((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))-(\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$

. . .

<u>Beweis</u> **114-9** ...

4.2: $\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z) = \ldots =$

$$((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) + (\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$
$$+((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) - (\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$

$$\stackrel{\mathbf{103-6}}{=} ((\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)) - (\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y)))$$
$$+((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{2.11}{=} (\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))$$
$$+((\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)))$$

$$\stackrel{2.10}{=} (\mathsf{Im}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Re}z)\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))$$

$$\stackrel{\mathbf{KGM}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))\cdot(\mathsf{Im}z)$$
$$+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))\cdot(\mathsf{Re}z)$$

$$\stackrel{\mathbf{113-6}}{=} \mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z).$$

5: Aus 4.1“$\mathsf{Re}(x\cdot(y\cdot z)) = \ldots = \mathsf{Re}((x\cdot y)\cdot z)$” und
aus 4.2“$\mathsf{Im}(x\cdot(y\cdot z)) = \ldots = \mathsf{Im}((x\cdot y)\cdot z)$”
folgt via **113-7**: $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z.$

□

114-10. Die nachfolgende Beispiel **114-12,13(BSP)** vorwegnehmend wird festgestellt, dass AssoziativGesetze Multiplikation weder in "Mischform" in $\mathbb{S}/\mathbb{C}$ noch in $\mathbb{B}$ verfügbar sind:

114-10.Bemerkung

- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{S}) \wedge (z \in \mathbb{C})) \Rightarrow (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{C}) \wedge (z \in \mathbb{S})) \Rightarrow (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  "$((x \in \mathbb{B}) \wedge (z \in \mathbb{B})) \Rightarrow (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

114-11. Ausnahmsweise wird nun ein "Satz der rechnenden Mathematik" in die Essays aufgenommen. Es fällt die Langatmigkeit der Begründungen auf. Die Aussagen werden teilweise in **114-12,13(BSP)** verwendet:

114-11(Satz)

a) $0 - 1 = -1 + 0 = -1$.

b) $1 \cdot \mathsf{i} = \mathsf{i} \cdot 1 = \mathsf{i}$.

c) "$\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}) = 1$" *und* "$\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}) = 1$".

d) "$\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}) = 1$" *und* "$\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}) = -1$".

e) $2 + 0 = 0 + 2 = 2$.

f) $2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

g) $(1+\mathsf{i}) \cdot (1-\mathsf{i}) = 2$.

h) $1 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot 1 = \mathsf{nan}$.

i) $1 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$.

j) $1 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty$.

k) $(-1) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty$.

l) $(-1) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-1) = +\infty$.

m) $(+\infty) \cdot (1+\mathsf{i}) = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

n) "$\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$" *und* "$\mathsf{Im}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) = +\infty$".

o) "$\mathsf{Re}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = +\infty$" *und* "$\mathsf{Im}((+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$".

p) $((+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)) \cdot (1-\mathsf{i}) = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

q) $(+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty) \neq (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`RECH.`**-Notation**

Beweis **114-11**

`REIM`-**Notation**.

---

a)

1: Aus **100-7**“$-1 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: -1 Zahl.

2: Aus 1“-1 Zahl”
folgt via **FSA**0: $(0+(-1)=-1) \wedge ((-1)+0=-1)$.

3.1: Aus 2“$0+(-1)=-1\ldots$”
folgt: $0-1=-1$.

3.2: Aus 2“$\ldots(-1)+0=-1$”
folgt: $-1+0=-1$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $0-1=-1+0=-1$.

<u>Beweis **114-11**</u> `b)`

`1.1:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Re}(1\cdot\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}1)\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})-(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})-(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})-0\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{AAIII}}{=} 1\cdot 0-0\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{AAIII}}{=} 1\cdot 0-0\cdot 1\\
&\overset{\mathbf{98-18}}{=} 0-0\cdot 1\\
&\overset{\mathbf{98-18}}{=} 0-0\\
&\overset{\mathbf{98-15}}{=} 0.
\end{aligned}$$

`1.2:`

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(1\cdot\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}1)\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})-(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})-(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot(\mathsf{Im}\mathsf{i})-0\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{AAIII}}{=} 1\cdot 1-0\cdot(\mathsf{Re}\mathsf{i})\\
&\overset{\mathbf{AAIII}}{=} 1\cdot 1-0\cdot 0\\
&\overset{\mathbf{98-19}}{=} 1-0\cdot 0\\
&\overset{\mathbf{98-16}}{=} 1-0\\
&\overset{\mathbf{98-15}}{=} 1+0\\
&\overset{\mathbf{98-10}}{=} 1.
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{Re}(1\cdot\mathsf{i})=\ldots=0$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Im}(1\cdot\mathsf{i})=\ldots=1$”
folgt via **96-33**: $1\cdot\mathsf{i}=\mathsf{i}.$

`3:` Via **KGM** gilt: $\mathsf{i}\cdot 1=1\cdot\mathsf{i}.$

`4:` Aus `2`“$1\cdot\mathsf{i}=\mathsf{i}$” und
aus `3`“$\mathsf{i}\cdot 1=1\cdot\mathsf{i}$”
folgt: $1\cdot\mathsf{i}=\mathsf{i}\cdot 1=\mathsf{i}.$

Beweis **114-11** c)

1: Aus **95-12**“$1 \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $(\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}\cdot 1)=1) \wedge (\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}\cdot 1)=-1)$.

2.1: Aus 1“$\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}\cdot 1)=1\ldots$” und
aus b)“$\mathsf{i}\cdot 1=\mathsf{i}$”
folgt: $\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})=1$.

2.2: Aus 1“$\ldots\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}\cdot 1)=1$” und
aus b)“$\mathsf{i}\cdot 1=\mathsf{i}$”
folgt: $\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})=1$.

3: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $(\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})=1) \wedge (\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})=1)$.

d)

1: Aus **100-7**“$-1 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: $-1 \in \mathbb{T}$.

2.1: Aus **95-12**“$1 \in \mathbb{T}$” und
aus 1“$-1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}\cdot(-1))=1$.

2.2: Aus **95-12**“$1 \in \mathbb{T}$” und
aus 1“$-1 \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}\cdot(-1))=-1$.

3.1: $\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}) \stackrel{\text{b)}}{=} \mathsf{Re}(1-\mathsf{i}\cdot 1)=\mathsf{Re}(1+(-\mathsf{i}\cdot 1)) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{Re}(1+\mathsf{i}\cdot(-1)) \stackrel{2.1}{=} 1$.

3.2: $\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}) \stackrel{\text{b)}}{=} \mathsf{Im}(1-\mathsf{i}\cdot 1)=\mathsf{Im}(1+(-\mathsf{i}\cdot 1)) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} \mathsf{Im}(1+\mathsf{i}\cdot(-1)) \stackrel{2.2}{=} -1$.

4: Aus 3.1“$\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})=\ldots=1$” und
aus 3.2“$\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})=\ldots=-1$”
folgt: $(\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})=1) \wedge (\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})=-1)$.

e)

1: Aus **109-26**“$2 \in \mathbb{R}$”
folgt via $\in$**SZ**: 2 Zahl.

2: Aus 1“2 Zahl”
folgt via **FSA**0: $2+0=0+2=2$.

<u>Beweis **114-11**</u> `f)`

`1:` Via **109-26** gilt: $0<2.$

`2:` Aus `1`“$0<2$”
folgt via **107-22**: $2\cdot(+\infty)=+\infty.$

`g)`

`1:`
$$
\begin{aligned}
&(1+\mathsf{i})\cdot(1-\mathsf{i})\\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\;&(\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}))\\
&+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))\\
\stackrel{\text{c)}}{=}\;&(1\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot(1\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))\\
\stackrel{\text{c)}}{=}\;&(1\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-1\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot(1\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+1\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))\\
\stackrel{\text{d)}}{=}\;&(1\cdot1-1\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot(1\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+1\cdot1)\\
\stackrel{\text{d)}}{=}\;&(1\cdot1-1\cdot(-1))+\mathsf{i}\cdot(1\cdot(-1)+1\cdot1)\\
\stackrel{\mathbf{98-19}}{=}\;&(1-1\cdot(-1))+\mathsf{i}\cdot(1\cdot(-1)+1\cdot1)\\
\stackrel{\mathbf{110-7}}{=}\;&(1-(-1))+\mathsf{i}\cdot(-1+1)\\
\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=}\;&(1+1)+\mathsf{i}\cdot(-1+1)\\
\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=}\;&(1+1)+\mathsf{i}\cdot(1-1)\\
\stackrel{\mathbf{102-10}}{=}\;&(1+1)+\mathsf{i}\cdot0\\
\stackrel{\mathbf{98-18}}{=}\;&(1+1)+0\\
\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\;&1+1\\
\stackrel{\mathbf{109-25(Def)}}{=}\;&2.
\end{aligned}
$$

`2:` Aus `1`
folgt: $(1+\mathsf{i})\cdot(1-\mathsf{i})=2.$

`h)`

Aus **95-2**“$0\neq1$” und
aus **95-12**“$1\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $1\cdot\mathsf{nan}=\mathsf{nan}\cdot1=\mathsf{nan}.$

Beweis **114-11** `i)`

Aus **107-6**"$0 < 1$"
folgt via **107-22**: $1 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$

`j)`

Aus **107-6**"$0 < 1$"
folgt via **107-22**: $1 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 1 = -\infty.$

`k)`

`1:` $(-1) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(1 \cdot (+\infty)) \stackrel{\mathtt{i)}}{=} -(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$

`2:` Via **KGM** gilt: $(-1) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-1).$

`3:` Aus `1`"$(-1) \cdot (+\infty) = \ldots = -\infty$" und
aus `2`"$(-1) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-1)$"
folgt: $(-1) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty.$

`l)`

`1:` $(-1) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(1 \cdot (-\infty)) \stackrel{\mathtt{j)}}{=} -(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty.$

`2:` Via **KGM** gilt: $(-1) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-1).$

`3:` Aus `1`"$(-1) \cdot (-\infty) = \ldots = +\infty$" und
aus `2`"$(-1) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-1)$"
folgt: $(-1) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-1) = +\infty.$

<u>Beweis **114-11**</u> `m)`

`1:` $$(+\infty)\cdot(1+\mathsf{i})$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})-\mathsf{Im}(+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})) +\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}(+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})+\mathsf{Im}(+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} ((+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})-\mathsf{Im}(+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})) +\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})+\mathsf{Im}(+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} ((+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i})-0\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})+0\cdot\mathsf{Re}(1+\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathtt{c)}}{=} ((+\infty)\cdot 1-0\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1+\mathsf{i})+0\cdot 1)$$

$$\stackrel{\mathtt{c)}}{=} ((+\infty)\cdot 1-0\cdot 1)+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot 1+0\cdot 1)$$

$$\stackrel{\mathtt{i)}}{=} ((+\infty)-0\cdot 1)+\mathsf{i}\cdot((+\infty)+0\cdot 1)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-18}}{=} ((+\infty)-0)+\mathsf{i}\cdot((+\infty)+0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} ((+\infty)+0)+\mathsf{i}\cdot((+\infty)+0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} (+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`3:` Aus 2
folgt: $$(+\infty)\cdot(1+\mathsf{i})=(+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty).$$

`n)`

Aus **95-12**“$+\infty\in\mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$+\infty\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))=+\infty)\wedge(\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))=+\infty).$$

`o)`

Aus **95-12**“$+\infty\in\mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$”
folgt via **AAIV**:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})=+\infty)\wedge(\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})=+\infty).$$

<u>Beweis **114-11**</u> `p)`

`1:` $((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot(1-\mathsf{i})$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})) +\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Re}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathtt{n)}}{=} ((+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-\mathsf{Im}(((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty)))\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})) +\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+\mathsf{Im}(((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty)))\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathtt{n)}}{=} ((+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i})-(+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})) +\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})+(+\infty)\cdot\mathsf{Re}(1-\mathsf{i}))$$

$$\stackrel{\mathtt{d)}}{=} ((+\infty)\cdot 1-(+\infty)\cdot(\mathsf{Im}(1-\mathsf{i})))+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot(\mathsf{Im}(1-\mathsf{i}))+(+\infty)\cdot 1)$$

$$\stackrel{\mathtt{d)}}{=} ((+\infty)\cdot 1-(+\infty)\cdot(-1))+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot(-1)+(+\infty)\cdot 1)$$

$$\stackrel{\mathtt{i)}}{=} ((+\infty)-(+\infty)\cdot(-1))+\mathsf{i}\cdot((+\infty)\cdot(-1)+(+\infty))$$

$$\stackrel{\mathtt{k)}}{=} ((+\infty)-(-\infty))+\mathsf{i}\cdot((-\infty)+(+\infty))$$

$$\stackrel{\mathbf{97-4}}{=} (+\infty)+\mathsf{i}\cdot((-\infty)+(+\infty))$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIV}}{=} (+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))\cdot(1-\mathsf{i})=(+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$

`q)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `n)` gilt: $\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))=+\infty.$

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `o)` gilt: $\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})=\mathsf{nan}.$

`2:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan}\neq+\infty$” und
aus `1.1`“$\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))=+\infty$”
folgt: $\mathsf{nan}\neq\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty)).$

`3:` Aus `1.2`“$\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})=\mathsf{nan}$” und
aus `2`“$\mathsf{nan}\neq\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))$”
folgt: $\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})\neq\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty)).$

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan})\neq\mathsf{Im}((+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty))$”
folgt via **94-10**: $(+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\neq(+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty).$

`5:` Aus `4`
folgt: $(+\infty)+\mathsf{i}\cdot(+\infty)\neq(+\infty)+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}.$

□

114-12. Wie an Hand des nun vorliegenden Beispiels klar wird, kann es keine "Mischform" eines AssoziativGesetzes Multiplikation geben, bei der *nur* von $x \in \mathbb{S}$ und $z \in \mathbb{C}$ ausgegangen wird:

<u>114-12.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = +\infty$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

→) $z = 1 - \mathsf{i}$.

Dann folgt:

`a)` $x \in \mathbb{S}$.

`b)` $y \in \mathbb{C}$.

`c)` $z \in \mathbb{C}$.

`d)` $x \cdot y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

`e)` $y \cdot z = 2$.

`f)` $x \cdot (y \cdot z) = +\infty$.

`g)` $(x \cdot y) \cdot z = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`h)` $x \cdot (y \cdot z) \neq (x \cdot y) \cdot z$.

Ad `defg)`: Siehe **114-11**.

114-13. Wie an Hand des nun vorliegenden Beispiels klar wird, kann es keine "Mischform" eines AssoziativGesetzes Multiplikation geben, bei der *nur* von $x \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{S}$ ausgegangen wird:

<u>114-13.BEISPIEL</u>

Es gelte:

→) $x = 1 - \mathsf{i}$.

→) $y = 1 + \mathsf{i}$.

→) $z = +\infty$.

Dann folgt:

`a)` $x \in \mathbb{C}$.

`b)` $y \in \mathbb{C}$.

`c)` $z \in \mathbb{S}$.

`d)` $x \cdot y = 2$.

`e)` $y \cdot z = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

`f)` $x \cdot (y \cdot z) = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.

`g)` $(x \cdot y) \cdot z = +\infty$.

`h)` $x \cdot (y \cdot z) \neq (x \cdot y) \cdot z$.

Ad `defg)`: Siehe **114-11** unter Einsatz von **KGM**.

114-14. Das **AGM**$\mathbb{C}$ bietet in Kombination mit dem **KGM** eine Unzahl an Möglichkeiten, mehrfache Produkte umzustellen. Hierzu zwei Manipulationen:

114-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $y \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $z \in \mathbb{C}$.

$\rightarrow$) $w \in \mathbb{C}$.

Dann folgt:

a) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w)$.

b) $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$.

RECH-**Notation**.

Beweis **114-14** a)

1.1: Aus →) "$z \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$w \in \mathbb{C}$"
folgt via ·**SZ**: $$z \cdot w \in \mathbb{C}.$$

1.2: Aus →) "$w \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{C}$"
folgt via ·**SZ**: $$w \cdot z \in \mathbb{C}.$$

1.3: Aus →) "$y \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$w \in \mathbb{C}$"
folgt via ·**SZ**: $$y \cdot w \in \mathbb{C}.$$

1.4: Aus →) "$y \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $$y \cdot (w \cdot z) = (y \cdot w) \cdot z.$$

2.1: Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus 1.1 "$z \cdot w \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $$x \cdot (y \cdot (z \cdot w)) = (x \cdot y) \cdot (z \cdot w).$$

2.2: Aus →) "$x \in \mathbb{C}$" und
aus 1.3 "$y \cdot w \in \mathbb{C}$"
folgt via **AGM**$\mathbb{C}$: $$x \cdot (z \cdot (y \cdot w)) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w).$$

3: $$(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) \stackrel{2.1}{=} x \cdot (y \cdot (z \cdot w)) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (y \cdot (w \cdot z)) \stackrel{1.4}{=} x \cdot ((y \cdot w) \cdot z) \stackrel{\mathbf{KGM}}{=} x \cdot (z \cdot (y \cdot w)) \stackrel{2.2}{=} (x \cdot z) \cdot (y \cdot w).$$

4: Aus 3
folgt: $$(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot w).$$

<u>Beweis **114-14**</u> `b)`

`1:` Aus →) "$x \in \mathbb{C}$",
aus →) "$y \in \mathbb{C}$",
aus →) "$w \in \mathbb{C}$" und
aus →) "$z \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(x \cdot y) \cdot (w \cdot z) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$.

`2:` Via **KGM** gilt: $w \cdot z = z \cdot w$.

`3:` Aus `1`"$(x \cdot y) \cdot (w \cdot z) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$" und
aus `2`"$w \cdot z = z \cdot w$"
folgt: $(x \cdot y) \cdot (z \cdot w) = (x \cdot w) \cdot (y \cdot z)$.

□

Jede höchstens zweielementige Kette hat Minimum und Maximum.
Nicht jede endliche Kette hat minimales/maximales Element.
Nicht jede endliche Kette hat ein Minimum/Maximum.

Ersterstellung: 20/09/09 **Letzte Änderung: 12/02/12**

115-1. Jede einelementige Kette hat Minimum und Maximum:

<u>115-1(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) *p Menge.*

$\rightarrow$) $\{p\}$ *ist M_Kette.*

Dann folgt:

a) *p ist M_Minimum von* $\{p\}$.

b) *p ist M_Maximum von* $\{p\}$.

c) $\exists\Omega:\Omega$ *ist M_Minimum von* $\{p\}$.

d) $\exists\Omega:\Omega$ *ist M_Maximum von* $\{p\}$.

<u>Beweis **115-1**</u>

`1:` Aus →) “ p Menge ”
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`2:` Aus →) “ $\{p\}$ ist M_Kette ” und
aus `1` “ $p \in \{p\}$ ”
folgt via **30-71**: p_M_p.

`3.a):` Aus `2` “ p_M_p ”
folgt via **38-23**: p ist M_Minimum von $\{p\}$.

`3.b):` Aus `2` “ p_M_p ”
folgt via **38-23**: p ist M_Maximum von $\{p\}$.

`4:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`5.1:` Aus `4` “ $\ldots \Omega = p$ ” und
aus `3.a)` “ p ist M_Minimum von $\{p\}$ ”
folgt: Ω ist M_Minimum von $\{p\}$.

`5.2:` Aus `4` “ $\ldots \Omega = p$ ” und
aus `3.b)` “ p ist M_Maximum von $\{p\}$ ”
folgt: Ω ist M_Maximum von $\{p\}$.

`6.c):` Aus `4` “ $\exists \Omega \ldots$ ” und
aus `5.1` “ Ω ist M_Minimum von $\{p\}$ ”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p\}$.

`6.d):` Aus `4` “ $\exists \Omega \ldots$ ” und
aus `5.2` “ Ω ist M_Maximum von $\{p\}$ ”
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Maximum von $\{p\}$.

$\square$

115-2. Falls p_M_p und p_M_q, dann ist p ein M_Minimum von $\{p, q\}$. Falls p_M_q und q_M_q, dann ist q ein M_Maximum von $\{p, q\}$:

115-2(Satz)

a) *Aus "p_M_p" und "p_M_q" folgt "p ist M_Minimum von $\{p, q\}$".*

b) *Aus "p_M_q" und "q_M_q" folgt "q ist M_Maximum von $\{p, q\}$".*

Beweis **115-2** `a)` `VS` gleich $(p\_M\_p) \wedge (p\_M\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p\_M\_p\ldots$"
folgt via **30-2**: p Menge.

`2:` Aus `1`"p Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

`Thema3.1` $\alpha \in \{p, q\}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(\alpha = p) \vee (\alpha = q)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\alpha = p$.

Aus `VS` gleich "$p\_M\_p\ldots$" und
aus `4.1.Fall`"$\alpha = p$"
folgt: p_M_α.

`4.2.Fall` $\alpha = q$.

Aus `VS` gleich "$\ldots p\_M\_q$" und
aus `4.2.Fall`"$\alpha = q$"
folgt: p_M_α.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: p_M_α.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"

`3.2:` Aus `2`"$p \in \{p, q\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$"
folgt via **38-6**: p ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

<u>Beweis **115-2**</u> `b)` `VS` gleich $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_q$"
folgt via **30-2**: q Menge.

`2:` Aus `1`"q Menge"
folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

`Thema3.1` $\alpha \in \{p, q\}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\alpha \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(\alpha = p) \vee (\alpha = q)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\alpha = p$.

Aus `4.1.Fall`"$\alpha = p \ldots$" und
aus `VS` gleich "$p\_M\_q \ldots$"
folgt: α_M_q.

`4.2.Fall` $\alpha = q$.

Aus `4.2.Fall`"$\alpha = q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q\_M\_q$"
folgt: α_M_q.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: α_M_q.

Ergo `Thema3.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$"

`3.2:` Aus `2`"$q \in \{p, q\}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \{p, q\}) \Rightarrow (\alpha\_M\_q)$"
folgt via **38-7**: q ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

□

115-3. Jede (höchstens) zweielementige Kette$\neq 0$ hat Minimum und Maximum:

<u>**115-3(Satz)**</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p *Menge.*

$\rightarrow$) q *Menge.*

$\rightarrow$) $\{p, q\}$ *ist* M*_Kette.*

Dann folgt:

a) $\exists \Omega : \Omega$ *ist* M*_Minimum von* $\{p, q\}$.

b) $\exists \Psi : \Psi$ *ist* M*_Maximum von* $\{p, q\}$.

<u>Beweis **115-3**</u>

1.1: Aus $\rightarrow$) "p Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

1.2: Aus $\rightarrow$) "q Menge"
folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

2.1: Aus $\rightarrow$) "$\{p, q\}$ ist M_Kette" und
aus 1.1 "$p \in \{p, q\}$"
folgt via **30-71**: p_M_p.

2.2: Aus $\rightarrow$) "$\{p, q\}$ ist M_Kette" und
aus 1.2 "$q \in \{p, q\}$"
folgt via **30-71**: q_M_q.

3.1: Aus $\rightarrow$) "$\{p, q\}$ ist M_Kette",
aus 1.1 "$p \in \{p, q\}$" und
aus 1.2 "$q \in \{p, q\}$"
folgt via **30-68(Def)**: $(p\_M\_q) \vee (q\_M\_p)$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **115-3**

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.1.Fall` $p \_M\_ q$.

`4.1:` Aus `2.1` "$p \_M\_ p$" und
aus `3.1.1.Fall` "$p \_M\_ q$"
folgt via **115-2**: p ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

`4.2:` Aus `3.1.1.Fall` "$p \_M\_ q$" und
aus `2.2` "$q \_M\_ q$"
folgt via **115-2**: q ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

`5.1:` Aus `4.1` "p ist M_Minimum von $\{p, q\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

`5.2:` Aus `4.2` "q ist M_Maximum von $\{p, q\}$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\})$
$\wedge(\exists \Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\})$.

`3.1.2.Fall` $q \_M\_ p$.

`4.1:` Aus `2.2` "$q \_M\_ q$" und
aus `3.1.2.Fall` "$q \_M\_ p$"
folgt via **115-2**: q ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

`4.2:` Aus `3.1.2.Fall` "$q \_M\_ p$" und
aus `2.1` "$p \_M\_ p$"
folgt via **115-2**: p ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

`5.1:` Aus `4.1` "q ist M_Minimum von $\{p, q\}$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

`5.2:` Aus `4.2` "p ist M_Maximum von $\{p, q\}$"
folgt: $\exists \Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\})$
$\wedge(\exists \Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` "$(\exists \Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\})$
$\wedge(\exists \Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\})$"

...

Beweis **115-3**

...

`3.a):` Aus `A1`
folgt: $\exists\Omega : \Omega$ ist M_Minimum von $\{p, q\}$.

`3.b):` Aus `A1`
folgt: $\exists\Psi : \Psi$ ist M_Maximum von $\{p, q\}$.

□

115-4. Das nachfolgende Beispiel vorwegnehmend wird hier fest gestellt, dass endliche Klassen$\neq 0$ nicht notwendiger Weise ein minimales/maximales Element haben - selbst wenn diese endlichen Klassen Ketten sind.
Da jedes Minimum/Maximum von x ein minimales/maximales Element von x ist, ergibt sich hieraus ohne viel weiteren Aufwand, dass endliche Klassen$\neq 0$ - oder auch endliche Ketten$\neq 0$ - nicht unbedingt Minimum/Maximum haben müssen:

<u>115-4.Bemerkung</u>

- Die Aussage
  "$(0 \neq x$ endlich$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $x)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq x$ endlich$) \Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $x)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq K$ endlich$) \wedge (K$ ist M_Kette$)$
  $\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_minimales Element von $K)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

- Die Aussage
  "$(0 \neq K$ endlich$) \wedge (K$ ist M_Kette$)$
  $\Rightarrow (\exists \Omega : \Omega$ ist M_maximales Element von $K)$"
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

115-5. Es folgt ein Beispiel für eine endliche Kette$\neq 0$, die weder ein minimales noch ein maximales Element hat. Im Hinblick auf **115-1,3** überrascht es nicht, dass die hier vorgestellte Kette mehr als zwei - nämlich drei - Elemente hat. In Anerkennung von Eschers Bildern könnte das Beispiel durchaus als "Eschers Treppen-Kette" durchgehen:

115-5.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) w Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $q \neq w$.

$\rightarrow$) $w \neq p$.

$\rightarrow$) $M = \{(p,p),(q,q),(w,w),(p,q),(q,w),(w,p)\}$.

$\rightarrow$) $K = \{p,q,w\}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq K$ endlich.

`b)` K ist M_Kette.

`c)` K hat kein M_minimales Element.

`d)` K hat kein M_maximales Element.

`e)` K hat kein M_Minimum.

`f)` K hat kein M_Maximum.

Ad `c)`: Als M_minimale Elemente von K kommen nur die Elemente von K, also p,q,w in Frage. Falls p ein M_minimales Element von K wäre, dann müsste wegen w_M_p auch p_M_w gelten. Dies ist wegen $p \neq q \neq w \neq p$ aber nicht der Fall. Also ist p *kein* M_minimales Element von K. Ähnlich wird gezeigt, dass q,w keine M_minimalen Elemente von K sind.

Ad `d)`: Die Aussage `d)` ist ähnlich wie `c)` beweisbar.

Ad `ef)`: Da K wegen `cd)` kein M_minimales/maximales Element hat, hat K auch kein M_Minimum/Maximum.

E bildet C in sich ab.

Ersterstellung: 27/12/09 **Letzte Änderung: 16/02/12**

116-1. Die Aussage "$E[C] \subseteq C$" spielt bereits bei **art1** eine Rolle. Nun wird dieser Aussage eine - naheliegende - Bezeichnung gegeben:

116-1(Definition)

"E **bildet** C **in sich ab**" genau dann, wenn gilt:

$$E[C] \subseteq C.$$

116-2. Jede Klasse E bildet $\mathcal{U}$ und 0 in sich ab und 0 bildet jede Klasse C - auch das Universum - in sich ab:

116-2(Satz)

a) *E bildet $\mathcal{U}$ in sich ab.*

b) *E bildet 0 in sich ab.*

c) *0 bildet C in sich ab.*

d) *0 bildet $\mathcal{U}$ in sich ab.*

<u>Beweis **116-2**</u> a)

1: Via **0-18** gilt: $E[\mathcal{U}]\subseteq\mathcal{U}$.

2: Aus 1 "$E[\mathcal{U}]\subseteq\mathcal{U}$"
folgt via **116-1(Def)**: E bildet $\mathcal{U}$ in sich ab.

b)

1: Via **8-12** gilt: $E[0]=0$.

2: Via **0-18** gilt: $0\subseteq 0$.

3: Aus 1 "$E[0]=0$" und
aus 2 "$0\subseteq 0$"
folgt: $E[0]\subseteq 0$.

4: Aus 3 "$E[0]\subseteq 0$"
folgt via **116-1(Def)**: E bildet 0 in sich ab.

c)

1: Via **8-12** gilt: $0[C]=0$.

2: Via **0-18** gilt: $0\subseteq C$.

3: Aus 1 "$0[C]=0$" und
aus 2 "$0\subseteq C$"
folgt: $0[C]\subseteq C$.

4: Aus 3 "$0[C]\subseteq C$"
folgt via **116-1(Def)**: 0 bildet C in sich ab.

d)

Aus c) "0 bildet C in sich ab"
folgt: 0 bildet $\mathcal{U}$ in sich ab.

□

116-3. Da aus $\mathsf{ran}\, E \subseteq C$ via `b)` folgt, dass E die Klasse C in sich abbildet, gibt es üblicher Weise viele Klassen, die durch E in sich abgebildet werden. Im Speziellen bildet E den Bild-Bereich $\mathsf{ran}\, E$ von E in sich ab. Jedoch sind via `cd)`, wonach aus $E[C] = 0$ oder $C \cap \mathsf{dom}\, E = 0$ folgt, dass E die Klasse C in sich abbildet, etliche dieser Klassen wohl nicht sehr interessant. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d)`:

116-3(Satz)

`a)` *E bildet $\mathsf{ran}\, E$ in sich ab.*

`b)` *Aus "$\mathsf{ran}\, E \subseteq C$" folgt "$E$ bildet C in sich ab".*

`c)` *Aus "$E[C] = 0$" folgt "E bildet C in sich ab".*

`d)` *Aus "$C \cap \mathsf{dom}\, E = 0$" folgt "$E$ bildet C in sich ab".*

Beweis **116-3** `b)` `VS` gleich $\mathsf{ran}\,E \subseteq C$.

`1:` Via **8-10** gilt: $E[C] \subseteq \mathsf{ran}\,E$.

`2:` Aus `1`“$E[C] \subseteq \mathsf{ran}\,E$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{ran}\,E \subseteq C$”
folgt via **0-6**: $E[C] \subseteq C$.

`3:` Aus `2`“$E[C] \subseteq C$”
folgt via **116-1(Def)**: E bildet C in sich ab.

`a)`

`1:` Via **0-6** gilt: $\mathsf{ran}\,E \subseteq \mathsf{ran}\,E$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{ran}\,E \subseteq \mathsf{ran}\,E$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: E bildet $\mathsf{ran}\,E$ in sich ab.

`c)` `VS` gleich $E[C] = 0$.

`1:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq C$.

`2:` Aus `VS` gleich “$E[C] = 0$” und
aus `1`“$0 \subseteq C$”
folgt: $E[C] \subseteq C$.

`3:` Aus `2`“$E[C] \subseteq C$”
folgt via **116-1(Def)**: E bildet C in sich ab.

`d)` `VS` gleich $C \cap \mathsf{dom}\,E = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich “$C \cap \mathsf{dom}\,E = 0$”
folgt via **8-13**: $E[C] = 0$.

`2:` Aus `1`“$E[C] = 0$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: E bildet C in sich ab.

□

116-4. Die ENullfunktion bildet C genau dann in sich ab, wenn $E \cap C$ leer ist oder wenn 0 Element von C ist:

116-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathtt{zo}_E$ *bildet* C *in sich ab.*

`ii)` *“$E \cap C = 0$” oder “$0 \in C$”.*

Beweis **116-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\mathtt{zo}_E$ bildet C in sich ab.

`1:` Es gilt: $(E \cap C = 0) \vee (0 \neq E \cap C)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \cap C = 0$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(E \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

`1.2.Fall` $0 \neq E \cap C$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$0 \neq E \cap C$”
folgt via **94-14**: $\mathtt{zo}_E[C] = \{0\}$.

`3:` Aus `VS` gleich “$\mathtt{zo}_E$ bildet C in sich ab”
folgt via **116-1(Def)**: $\mathtt{zo}_E[C] \subseteq C$.

`4:` Aus `3`“$\mathtt{zo}_E[C] \subseteq C$” und
aus `2`“$\mathtt{zo}_E[C] = \{0\}$”
folgt: $\{0\} \subseteq C$.

`5:` Aus **1-5**“$0 \in \{0\}$” und
aus `4`“$\{0\} \subseteq C$”
folgt via **0-4**: $0 \in C$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(E \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(E \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

<u>Beweis **116-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(E \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(E \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $E \cap C = 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$E \cap C = 0$”
folgt via **94-14**: $\mathsf{zo}_E[C] = 0$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{zo}_E[C] = 0$”
folgt via **116-3**: zo_E bildet C in sich ab.

`1.2.Fall` $0 \in C$.

`2:` Via **94-14** gilt: $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`“$0 \in C$”
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq C$.

`4:` Aus `2`“$\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$” und
aus `3`“$\{0\} \subseteq C$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq C$.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{zo}_E[C] \subseteq C$”
folgt via **116-1(Def)**: zo_E bildet C in sich ab.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: zo_E bildet C in sich ab.

□

116-5. Die universelle Nullfunktion bildet C genau dann in sich ab, wenn $C = 0$ oder $0 \in C$ gilt:

116-5(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` zo *bildet* C *in sich ab.*

`ii)` *"*$C = 0$*" oder "*$0 \in C$*".*

Beweis **116-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich zo bildet C in sich ab.

1: Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

2: Aus 1"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$" und
aus `VS` gleich "zo bildet C in sich ab"
folgt: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab.

3: Aus 2"$\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab"
folgt via **116-4**: $(\mathcal{U} \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

4: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

5: Aus 3"$(\mathcal{U} \cap C = 0) \vee (0 \in C)$" und
aus 4"$\mathcal{U} \cap C = C$"
folgt: $(C = 0) \vee (0 \in C)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(C = 0) \vee (0 \in C)$.

1: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

2: Aus `VS` gleich "$(C = 0) \vee (0 \in C)$" und
aus 1"$\mathcal{U} \cap C = C$"
folgt: $(\mathcal{U} \cap C = 0) \vee (0 \in C)$.

3: Aus 2"$(\mathcal{U} \cap C = 0) \vee (0 \in C)$"
folgt via **116-4**: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab.

4: Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

5: Aus 3"$\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab" und
aus 4"$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$"
folgt: zo bildet C in sich ab.

$\square$

116-6. In vielleicht erwarteter Weise bildet die EIdentität jede Klasse C in sich ab. Im Speziellen bildet die universelle Identität jede Klasse C in sich ab:

116-6(Satz)

a) id_E *bildet* C *in sich ab.*

b) id *bildet* C *in sich ab.*

Beweis **116-6** a)

1: Via **94-15** gilt: $\mathsf{id}_E[C] = E \cap C$.

2: Via **2-7** gilt: $E \cap C \subseteq C$.

3: Aus 1 "$\mathsf{id}_E[C] = E \cap C$" und
aus 2 "$E \cap C \subseteq C$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{id}_E[C] \subseteq C$.

4: Aus 3 "$\mathsf{id}_E[C] \subseteq C$"
folgt via **116-1(Def)**: id_E bildet C in sich ab.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab.

2: Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$.

3: Aus 1 "$\mathsf{id}_{\mathcal{U}}$ bildet C in sich ab" und
aus 2 "$\mathsf{id} = \mathsf{id}_{\mathcal{U}}$"
folgt: id bildet C in sich ab.

□

116-7. Eine Funktion f bildet C genau dann in sich ab, wenn $f(\alpha) \in C$ für alle $\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f$ gilt:

116-7(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f bildet C in sich ab.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

Beweis **116-7** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f bildet C in sich ab.

`Thema1` $\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `Thema1` "$\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-27**: $f(\alpha) \in f[C]$.

`3:` Aus `VS` gleich "f bildet C in sich ab"
folgt via **116-1(Def)**: $f[C] \subseteq C$.

`4:` Aus `2` "$f(\alpha) \in f[C]$" und
aus `3` "$f[C] \subseteq C$"
folgt via **0-4**: $f(\alpha) \in C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

Beweis **116-7** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\beta \in f[C]$.

2: Aus →) "f Funktion" und
aus Thema1.1 "$\beta \in f[C]$"
folgt via **18-28**:
$$\exists\Omega : (\beta = f(\Omega) \wedge (\Omega \in C) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\, f).$$

3: Aus 2 "$\ldots \Omega \in C \ldots$" und
aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in C \cap \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus 3 "$\Omega \in C \cap \mathsf{dom}\, f$" und
aus →) "$\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$"
folgt: $f(\Omega) \in C$.

5: Aus 2 "$\ldots \beta = f(\Omega) \ldots$" und
aus 4 "$f(\Omega) \in C$"
folgt: $\beta \in C$.

Ergo Thema1.1: $\forall\beta : (\beta \in f[C]) \Rightarrow (\beta \in C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“} f[C] \subseteq C \text{”}}$

1.2: Aus A1 gleich "$f[C] \subseteq C$"
folgt via **116-1(Def)**: f bildet C in sich ab.

□

116-8. Falls f eine Funktion ist und falls $C \subseteq \mathsf{dom}\, f$ gilt, dann nimmt **116-7** einfachere Gestalt an:

116-8(Satz)

Unter den Voraussetzungen ...

→) *f Funktion.*

→) $C \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` *f bildet C in sich ab.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

Beweis **116-8** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\qquad f$ bildet C in sich ab.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\qquad \alpha \in C$.

2: Aus →) “$C \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-10**: $\qquad C \cap \mathsf{dom}\, f = C$.

3: Aus `Thema1`“$\alpha \in C$” und
aus 2“$C \cap \mathsf{dom}\, f = C$”
folgt: $\qquad \alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f$.

4: Aus →) “f Funktion” und
aus 3“$\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **18-27**: $\qquad f(\alpha) \in f[C]$.

5: Aus `VS` gleich “f bildet C in sich ab”
folgt via **116-1(Def)**: $\qquad f[C] \subseteq C$.

6: Aus 4“$f(\alpha) \in f[C]$” und
aus 5“$f[C] \subseteq C$”
folgt via **0-4**: $\qquad f(\alpha) \in C$.

Ergo `Thema1`: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

1: Aus →) “$C \subseteq \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-10**: $\qquad C \cap \mathsf{dom}\, f = C$.

2: Aus `VS` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$” und
aus 1“$C \cap \mathsf{dom}\, f = C$”
folgt: $\qquad \forall \alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$.

3: Aus →) “f Funktion” und
aus 2“$\forall \alpha : (\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$”
folgt via **116-7**: $\qquad f$ bildet C in sich ab.

$\square$

116-9. Ohne allzu viel Mühe ergibt sich aus **116-7** Hinreichendes dafür, dass eine Funktion eine Klasse in sich abbildet:

116-9(Satz)

Aus "f Funktion" und "$\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$"
folgt "f bildet C in sich ab".

Beweis **116-9** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C))$.

`Thema1.1` $\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $\beta \in C$.

`3:` Aus 2 "$\beta \in C$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (f(\alpha) \in C)$"
folgt: $f(\beta) \in C$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion..." und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$"
folgt via **116-7**: f bildet C in sich ab.

$\square$

116-10. Nun wird Hinreichendes für Funktionen $f : D \to B$ angegeben, damit f eine Klasse C in sich abbildet:

116-10(Satz)

`a)` *Aus "$f : D \to B$" und "$B \subseteq C$" folgt "f bildet C in sich ab".*

`b)` *Aus "$f : D \to D$" folgt "f bildet D in sich ab".*

Beweis **116-10** `a)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (B \subseteq C)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus `VS` gleich "$\ldots B \subseteq C$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq C$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{ran}\, f \subseteq C$"
folgt via **116-3**: f bildet C in sich ab.

`b)` `VS` gleich $f : D \to D$.

`1:` Via **0-6** gilt: $D \subseteq D$.

`2:` Aus `VS` gleich "$f : D \to D$" und
aus `1`"$D \subseteq D$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: f bildet D in sich ab.

□

116-11. Falls $f : D \to D$ - hier stimmen Definitions- und Bild-Bereich von f überein -, dann bildet f eine Klasse C genau dann in sich ab, wenn f die Klasse $C \cap D$ in sich abbildet und dies ist genau dann der Fall, wenn $f(\alpha) \in C \cap D$ für alle $\alpha \in C \cap D$ gilt und dies ist genau dann der Fall, wenn $f(\alpha) \in C$ für alle $\alpha \in C \cap D$ gilt:

116-11(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\to$) $f : D \to D$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` *f bildet C in sich ab.*

`ii)` *f bildet $C \cap D$ in sich ab.*

`iii)` $\forall \alpha : (\alpha \in C \cap D) \Rightarrow (f(\alpha) \in C \cap D)$.

`iv)` $\forall \beta : (\beta \in C \cap D) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$.

<u>Beweis **116-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f bildet C in sich ab.

`1.1:` Aus →) “ $f : D \to D$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq D)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “ f bildet C in sich ab”
folgt via **116-1(Def)**: $f[C] \subseteq C$.

`2.1:` Via **8-10** gilt: $f[C \cap \mathsf{dom}\, f] = f[C]$.

`2.2:` Via **8-10** gilt: $f[C \cap D] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

`3.1:` Aus `2.1`“ $f[C \cap \mathsf{dom}\, f] = f[C]$ ” und
aus `1.1`“ $\mathsf{dom}\, f = D \ldots$ ”
folgt: $f[C \cap D] = f[C]$.

`3.2:` Aus `2.2`“ $f[C \cap D] \subseteq \mathsf{ran}\, f$ ” und
aus `1.1`“ $\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq D$ ”
folgt via **0-6**: $f[C \cap D] \subseteq D$.

`4:` Aus `3.1`“ $f[C \cap D] = f[C]$ ” und
aus `1.2`“ $f[C] \subseteq C$ ”
folgt: $f[C \cap D] \subseteq C$.

`5:` Aus `4`“ $f[C \cap D] \subseteq C$ ” und
aus `3.2`“ $f[C \cap D] \subseteq D$ ”
folgt via **2-12**: $f[C \cap D] \subseteq C \cap D$.

`6:` Aus `5`“ $f[C \cap D] \subseteq C \cap D$ ”
folgt via **116-1(Def)**: f bildet $C \cap D$ in sich ab.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich f bildet $C \cap D$ in sich ab.

`1:` Aus →) “ $f : D \to D$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

`2:` Via **2-7** gilt: $C \cap D \subseteq D$.

`3:` Aus `2`“ $C \cap D \subseteq D$ ” und
aus `1`“ $\ldots \mathsf{dom}\, f = D$ ”
folgt: $C \cap D \subseteq \mathsf{dom}\, f$.

`4:` Aus `1`“ f Funktion… ”,
aus `3`“ $C \cap D \subseteq \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus `VS` gleich “ f bildet $C \cap D$ in sich ab”
folgt via **116-8**: $\forall \alpha : (\alpha \in C \cap D) \Rightarrow (f(\alpha) \in C \cap D)$.

Beweis **116-11** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap D) \Rightarrow (f(\alpha) \in C \cap D)$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\beta \in C \cap D$.

2: Aus Thema1"$\beta \in C \cap D$" und
aus VS gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in C \cap D) \Rightarrow (f(\alpha) \in C \cap D)$"
folgt: $f(\beta) \in C \cap D$.

3: Aus 2"$f(\beta) \in C \cap D$"
folgt via **2-2**: $f(\beta) \in C$.

Ergo Thema1: $\forall\beta : (\beta \in C \cap D) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\forall\beta : (\beta \in C \cap D) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$.

1: Aus →)"$f : D \to D$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

2: Aus VS gleich "$\forall\beta : (\beta \in C \cap D) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$" und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $\forall\beta : (\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$.

3: Aus 1"f Funktion…" und
aus 2"$\forall\beta : (\beta \in C \cap \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (f(\beta) \in C)$"
folgt via **116-7**: f bildet C in sich ab.

□

mns bildet $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ in sich ab.

Ersterstellung: 28/12/09 **Letzte Änderung: 16/02/12**

117-1. Es wird ein Kriterium für "mns bildet C in sich ab" formuliert:

117-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` mns *bildet* C *in sich ab.*

`ii)` mns *bildet* $C \cap \mathbb{A}$ *in sich ab.*

`iii)` $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\alpha \in C \cap \mathbb{A})$.

`iv)` $\forall\beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})$.

`v)` $\forall\gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-\gamma \in C \cap \mathbb{A})$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **117-1** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich mns bildet C in sich ab.

`1:` Via **AAII** gilt: $\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "mns bildet C in sich ab"
folgt via **116-11**: mns bildet $C \cap \mathbb{A}$ in sich ab.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich mns bildet $C \cap \mathbb{A}$ in sich ab.

`1:` Via **AAII** gilt: $\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "mns bildet $C \cap \mathbb{A}$ in sich ab"
folgt via **116-11**: $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in C \cap \mathbb{A})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\alpha \in C \cap \mathbb{A})$.

<u>Beweis **117-1**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\alpha \in C \cap \mathbb{A})$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $-\beta \in C \cap \mathbb{A}$.

`2.1`: Aus `Thema1` "$-\beta \in C \cap \mathbb{A}$"
folgt via **2-2**: $-\beta \in \mathbb{A}$.

`2.2`: Aus `Thema1` "$-\beta \in C \cap \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\alpha \in C \cap \mathbb{A})$"
folgt: $-(-\beta) \in C \cap \mathbb{A}$.

`3`: Aus `2.1` "$-\beta \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4**: $-\beta$ Zahl.

`4`: Aus `3` "$-\beta$ Zahl"
folgt via **100-6**: β Zahl.

`5`: Aus `4` "β Zahl"
folgt via **FS**$--$: $-(-\beta) = \beta$.

`6`: Aus `2.2` "$-(-\beta) \in C \cap \mathbb{A}$" und
aus `5` "$-(-\beta) = \beta$"
folgt: $\beta \in C \cap \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1`: $\forall\beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})$.

Beweis **117-1** $\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $\forall \beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})$.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\delta \in C \cap \mathbb{A}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\delta \in C \cap \mathbb{A}$”
folgt via **2-2**: $\delta \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`“$\delta \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: δ Zahl.

`4:` Aus `3`“δ Zahl”
folgt via **FS**$--$: $-(-\delta) = \delta$.

`5:` Aus `4`“$-(-\delta) = \delta$” und
aus `Thema1.1`“$\delta \in C \cap \mathbb{A}$”
folgt: $-(-\delta) \in C \cap \mathbb{A}$.

`6:` Aus `4`“$-(-\delta) \in C \cap \mathbb{A}$” und
aus `VS` gleich “$\forall \beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})$”
folgt: $-\delta \in C \cap \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \,\Big|\; \text{“}\forall \delta : (\delta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\delta \in C \cap \mathbb{A})\text{”}}$

`1.2:` Aus `A1` gleich “$\forall \delta : (\delta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\delta \in C \cap \mathbb{A})$” und
aus `VS` gleich “$\forall \beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})$”
folgt: $\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-\gamma \in C \cap \mathbb{A})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-\gamma \in C \cap \mathbb{A})$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\gamma \in C \cap \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\gamma) \in C \cap \mathbb{A})$.

`3:` Aus **AAII**“$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$” und
aus `2`“$\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\gamma) \in C \cap \mathbb{A})$”
folgt via **116-11**: mns bildet C in sich ab.

$\square$

117-2. Unter der Voraussetzung "$C \subseteq \mathbb{A}$" kann **117-1** etwas vereinfacht werden:

117-2(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $C \subseteq \mathbb{A}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` mns *bildet* C *in sich ab.*

`ii)` $\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (-\alpha \in C)$.

`iii)` $\forall \beta : (-\beta \in C) \Rightarrow (\beta \in C)$.

`iv)` $\forall \gamma : (\gamma \in C) \Leftrightarrow (-\gamma \in C)$.

RECH-**Notation**.

Beweis **117-2**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$C \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **2-10**: $C \cap \mathbb{A} = C$.

`1.2:` Via **117-1** gilt:

$$\begin{aligned} &\text{mns bildet } C \text{ in sich ab} \\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha : (\alpha \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (-\alpha \in C \cap \mathbb{A})) \\ &\Leftrightarrow (\forall \beta : (-\beta \in C \cap \mathbb{A}) \Rightarrow (\beta \in C \cap \mathbb{A})) \\ &\Leftrightarrow (\forall \gamma : (\gamma \in C \cap \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-\gamma \in C \cap \mathbb{A})). \end{aligned}$$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} &\text{mns bildet } C \text{ in sich ab} \\ &\Leftrightarrow (\forall \alpha : (\alpha \in C) \Rightarrow (-\alpha \in C)) \\ &\Leftrightarrow (\forall \beta : (-\beta \in C) \Rightarrow (\beta \in C)) \\ &\Leftrightarrow (\forall \gamma : (\gamma \in C) \Leftrightarrow (-\gamma \in C)). \end{aligned}$$

□

117-3. Mit Hilfe von **100-6**, **101-9** und von **116-9** wird ohne viel Mühe der nunmehrige Satz bewiesen:

117-3(Satz)

a) mns *bildet* $\mathbb{R}$ *in sich ab.*

b) mns *bildet* $\mathbb{S}$ *in sich ab.*

c) mns *bildet* $\mathbb{T}$ *in sich ab.*

d) mns *bildet* $\mathbb{C}$ *in sich ab.*

e) mns *bildet* $\mathbb{B}$ *in sich ab.*

f) mns *bildet* $\mathbb{A}$ *in sich ab.*

Beweis **117-3**

RECH-**Notation**.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

2: Aus Thema1.1"$\alpha \in \mathbb{R}$"
folgt via **100-6**: $-\alpha \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{R}$.

Ergo Thema1.1: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{R})\text{"}}$

1.2: Aus **96-1**"mns Funktion" und
aus A1 gleich "$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{R})$"
folgt via **116-9**: mns bildet $\mathbb{R}$ in sich ab.

<u>Beweis</u> **117-3** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{S}$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{S}$" folgt via **100-6**:	$-\alpha \in \mathbb{S}$.
`3:` Aus 2 folgt:	$\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{S}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{S})\text{”}}$

`1.2:` Aus **96-1** "mns Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{S})$"
folgt via **116-9**: mns bildet $\mathbb{S}$ in sich ab.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{T}$.
`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathbb{T}$" folgt via **100-6**:	$-\alpha \in \mathbb{T}$.
`3:` Aus 2 folgt:	$\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{T}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{T})\text{”}}$

`1.2:` Aus **96-1** "mns Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{T})$"
folgt via **116-9**: mns bildet $\mathbb{T}$ in sich ab.

Beweis **117-3** `d)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{C}$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{C}$” folgt via **101-9**:	$-\alpha \in \mathbb{C}$.
`3:` Aus 2 folgt:	$\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \wedge (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{C})\text{”}}$

`1.2:` Aus **96-1**“mns Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{C})$”
folgt via **116-9**: mns bildet $\mathbb{C}$ in sich ab.

`e)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{B}$.
`2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{B}$” folgt via **101-9**:	$-\alpha \in \mathbb{B}$.
`3:` Aus 2 folgt:	$\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \wedge (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{B})\text{”}}$

`1.2:` Aus **96-1**“mns Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathsf{mns}(\alpha) \in \mathbb{B})$”
folgt via **116-9**: mns bildet $\mathbb{B}$ in sich ab.

`f)`

Aus **AAII**“$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **116-10**: mns bildet $\mathbb{A}$ in sich ab.

□

117-4. Im vorliegenden Satz werden, weil es hier gut in den Kontext passt und weil nunmehr nur mehr *eine* Satznummer gemerkt werden muss, die über **100-6** und **101-9** verstreuten Aussagen zusammengefasst:

117-4(Satz)

a) *"$p \in \mathbb{R}$" genau dann, wenn "$-p \in \mathbb{R}$".*

b) *"$p \in \mathbb{S}$" genau dann, wenn "$-p \in \mathbb{S}$".*

c) *"$p \in \mathbb{T}$" genau dann, wenn "$-p \in \mathbb{T}$".*

d) *"$p \in \mathbb{C}$" genau dann, wenn "$-p \in \mathbb{C}$".*

e) *"$p \in \mathbb{B}$" genau dann, wenn "$-p \in \mathbb{B}$".*

f) *"p Zahl" genau dann, wenn "$-p$ Zahl".*

RECH-**Notation**.

Beweis **117-4** a)

Via **100-6** gilt: $(p \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{R})$.

b)

Via **100-6** gilt: $(p \in \mathbb{S}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{S})$.

c)

Via **100-6** gilt: $(p \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{T})$.

d)

Via **101-9** gilt: $(p \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{C})$.

e)

Via **101-9** gilt: $(p \in \mathbb{B}) \Leftrightarrow (-p \in \mathbb{B})$.

f)

Via **100-6** gilt: $(p \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (-p \text{ Zahl})$.

$\square$

DGVZ: DistributivGesetze VZ.

Ersterstellung: 16/09/11 **Letzte Änderung: 16/02/12**

118-1. Falls $0 \leq x$, dann $0 \leq x \cdot (+\infty)$ und es gilt Ähnliches für das Produkt von x mit $-\infty$ und unter der geänderten Voraussetzung $x \leq 0$:

118-1(Satz)

a) *Aus* “$0 \leq x$” *folgt* “$0 \leq x \cdot (+\infty)$” *und* “$0 \leq (+\infty) \cdot x$”.

b) *Aus* “$0 \leq x$” *folgt* “$x \cdot (-\infty) \leq 0$” *und* “$(-\infty) \cdot x \leq 0$”.

c) *Aus* “$x \leq 0$” *folgt* “$x \cdot (+\infty) \leq 0$” *und* “$(+\infty) \cdot x \leq 0$”.

d) *Aus* “$x \leq 0$” *folgt* “$0 \leq x \cdot (-\infty)$” *und* “$0 \leq (-\infty) \cdot x$”.

`RECH.`$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis **118-1**</u> `a)` `VS` gleich $0 \leq x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **41-3**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 < x$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall`"$0 < x$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus **107-6**"$0 < +\infty$" und
aus `2`"$x \cdot (+\infty) = +\infty$"
folgt: $0 < x \cdot (+\infty)$.

`4:` Aus `3`"$0 < x \cdot (+\infty)$"
folgt via **41-3**: $0 \leq x \cdot (+\infty)$.

`1.1.2.Fall` $0 = x$.

`2:` Aus `1.1.2.Fall`"$0 = x$" und
aus **AAVI**"$0 \cdot (+\infty) = 0$"
folgt: $x \cdot (+\infty) = 0$.

`3:` Aus **107-6**"$0 \leq 0$" und
aus `2`"$x \cdot (+\infty) = 0$"
folgt: $0 \leq x \cdot (+\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \leq x \cdot (+\infty)$"

`1.2:` Via **KGM**
gilt: $x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$.

`2:` Aus `A1` gleich "$0 \leq x \cdot (+\infty)$" und
aus `1.2`"$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x$"
folgt: $0 \leq (+\infty) \cdot x$.

`3:` Aus `A1` gleich "$0 \leq x \cdot (+\infty)$" und
aus `2`"$0 \leq (+\infty) \cdot x$"
folgt: $(0 \leq x \cdot (+\infty)) \wedge (0 \leq (+\infty) \cdot x)$.

<u>Beweis **118-1**</u> `b)` `VS` gleich $0 \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq x \cdot (+\infty)$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq x \cdot (+\infty)$"
folgt via **109-16**: $-x \cdot (+\infty) \leq 0$.

`3:` $x \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot (-(+\infty)) \stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} -x \cdot (+\infty)$.

`4:` Aus `2`"$-x \cdot (+\infty) \leq 0$" und
aus `3`"$x \cdot (-\infty) = \ldots = -x \cdot (+\infty)$"
folgt: $x \cdot (-\infty) \leq 0$.

`5:` Via **KGM** gilt: $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty)$.

`6:` Aus `5`"$(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty)$" und
aus `4`"$x \cdot (-\infty) \leq 0$"
folgt: $(-\infty) \cdot x \leq 0$.

`7:` Aus `4`"$x \cdot (-\infty) \leq 0$" und
aus `6`"$(-\infty) \cdot x \leq 0$"
folgt: $(x \cdot (-\infty) \leq 0) \wedge ((-\infty) \cdot x \leq 0)$.

`c)` `VS` gleich $x \leq 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`2:` Aus `1`"$0 \leq -x$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \leq (-x) \cdot (+\infty)$.

`3:` Via **FS**$-\cdot$ gilt: $(-x) \cdot (+\infty) = -x \cdot (+\infty)$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq (-x) \cdot (+\infty)$" und
aus `3`"$(-x) \cdot (+\infty) = -x \cdot (+\infty)$"
folgt: $0 \leq -x \cdot (+\infty)$.

`5:` Aus `4`"$0 \leq -x \cdot (+\infty)$"
folgt via **109-16**: $x \cdot (+\infty) \leq 0$.

`6:` Via **KGM** gilt: $(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty)$.

`7:` Aus `6`"$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty)$" und
aus `5`"$x \cdot (+\infty) \leq 0$"
folgt: $(+\infty) \cdot x \leq 0$.

`8:` Aus `5`"$x \cdot (+\infty) \leq 0$" und
aus `7`"$(+\infty) \cdot x \leq 0$"
folgt: $(x \cdot (+\infty) \leq 0) \wedge ((+\infty) \cdot x \leq 0)$.

Beweis **118-1** `d)` `VS` gleich $x \leq 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \cdot (+\infty) \leq 0$.

`2:` Aus `1`"$x \cdot (+\infty) \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x \cdot (+\infty)$.

`3:` $-x \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot (-(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (-\infty)$.

`4:` Aus `2`"$0 \leq -x \cdot (+\infty)$" und
`3`"$-x \cdot (+\infty) = \ldots = x \cdot (-\infty)$"
folgt: $0 \leq x \cdot (-\infty)$.

`5:` Via **KGM** gilt: $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$.

`6:` Aus `4`"$0 \leq x \cdot (-\infty)$" und
aus `5`"$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x$"
folgt: $0 \leq (-\infty) \cdot x$.

`7:` Aus `4`"$0 \leq x \cdot (-\infty)$" und
aus `6`"$0 \leq (-\infty) \cdot x$"
folgt: $(0 \leq x \cdot (-\infty)) \wedge (0 \leq (-\infty) \cdot x)$.

□

118-2. Nun wird ein HilfsSatz zum Beweis von **DGVZ** etabliert, indem unter anderem gezeigt wird, dass aus $0 < x, y, z$ die Gleichung $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ folgt:

118-2(Satz)

a) *Aus* “$0 < x$” *und* “$0 < y$” *und* “$0 < z$” *folgt* “$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$”.

b) *Aus* “$0 \leq x$” *und* “$0 \leq y$” *und* “$0 \leq z$” *folgt* “$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$”.

c) *Aus* “$x \in \mathbb{S}$” *und* “$0 \leq y$” *und* “$0 \leq z$” *folgt* “$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$”.

d) *Aus* “$0 \leq y$” *und* “$0 \leq z$” *folgt* “$\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$”.

e) *Aus* “$x \in \mathbb{T}$” *und* “$0 \leq y$” *und* “$0 \leq z$” *folgt* “$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$”.

f) *Aus* “x *Zahl*” *und* “$0 \leq y$” *und* “$0 \leq z$” *folgt* “$x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **118-2**

`REIM`-**Notation**.

`a)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y \ldots$"
folgt via **107-16**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < z$"
folgt via **107-16**: $(z \in \mathbb{R}) \vee (z = +\infty)$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty) \\ \vee & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R}) \\ \vee & (x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

Aus **`2.1.Fall`**"$x \in \mathbb{R} \ldots$",
aus **`2.1.Fall`**"$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus **`2.1.Fall`**"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis</u> **118-2** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$
folgt via **AAVI**: $y + (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $x \cdot y + (+\infty) = +\infty$.

`5:` $x \cdot (y+z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot (y + (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} x \cdot y + (+\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **118-2** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot z \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + z = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$x \cdot z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + x \cdot z = +\infty$.

`5:` $x \cdot (y+z) \stackrel{3.4}{=} x \cdot ((+\infty) + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{4}{=} (+\infty) + x \cdot z$
$\stackrel{3.1}{=} x \cdot (+\infty) + x \cdot z \stackrel{3.4}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **118-2** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(x = +\infty) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $x = +\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y \ldots$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot y = +\infty$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < z$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot z = +\infty$.

`3.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 < y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 < z$"
folgt via **FS**$\leq +$: $0 < y + z$.

`4:` Aus `3.4`"$0 < y + z$"
folgt via **107-22**: $(+\infty) \cdot (y + z) = +\infty$.

`5:` $$x \cdot (y+z) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y+z) \stackrel{4}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{3.2}{=} ((+\infty) \cdot y) + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} ((+\infty) \cdot y) + ((+\infty) \cdot z) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`2.5.Fall` $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-22**: $x \cdot (+\infty) = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $y = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $z = +\infty$.

`4:` $$x \cdot (y+z) \stackrel{3.2}{=} x \cdot ((+\infty) + z) \stackrel{3.3}{=} x \cdot ((+\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} x \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (x \cdot (+\infty)) + (x \cdot (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} (x \cdot y) + (x \cdot (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **118-2** a)

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.6.Fall}}$ $(x=+\infty)\wedge(y\in\mathbb{R})\wedge(z=+\infty).$

3.1: Aus 2.6.Fall
folgt: $x=+\infty.$

3.2: Aus VS gleich "$\ldots 0<y\ldots$"
folgt via **107-22**: $(+\infty)\cdot y=+\infty.$

3.3: Aus 2.6.Fall"$\ldots y\in\mathbb{R}\ldots$"
folgt via **AAVI**: $y+(+\infty)=+\infty.$

3.4: Aus 2.6.Fall
folgt: $z=+\infty.$

4: $$x\cdot(y+z)\stackrel{3.1}{=}(+\infty)\cdot(y+z)\stackrel{3.4}{=}(+\infty)\cdot(y+(+\infty))\stackrel{3.3}{=}(+\infty)\cdot(+\infty)\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}+\infty\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(+\infty)\stackrel{3.2}{=}(+\infty)\cdot y+(+\infty)\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}(+\infty)\cdot y+(+\infty)\cdot(+\infty)\stackrel{3.1}{=}x\cdot y+x\cdot(+\infty)\stackrel{3.4}{=}x\cdot y+x\cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z.$

$\boxed{\texttt{2.7.Fall}}$ $(x=+\infty)\wedge(y=+\infty)\wedge(z\in\mathbb{R}).$

3.1: Aus 2.7.Fall
folgt: $x=+\infty.$

3.2: Aus 2.7.Fall
folgt: $y=+\infty.$

3.3: Aus VS gleich "$\ldots 0<z$"
folgt via **107-22**: $(+\infty)\cdot z=+\infty.$

3.4: Aus 2.7.Fall"$\ldots z\in\mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty)+z=+\infty.$

4: $$x\cdot(y+z)\stackrel{3.1}{=}(+\infty)\cdot(y+z)\stackrel{3.2}{=}(+\infty)\cdot((+\infty)+z)\stackrel{3.4}{=}(+\infty)\cdot(+\infty)\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}+\infty\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(+\infty)\stackrel{3.3}{=}(+\infty)+(+\infty)\cdot z\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}(+\infty)\cdot(+\infty)+(+\infty)\cdot z\stackrel{3.1}{=}x\cdot(+\infty)+x\cdot z\stackrel{3.2}{=}x\cdot y+x\cdot z.$$

5: Aus 4
folgt: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z.$

...

<u>Beweis</u> **118-2** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{2.8.Fall}}$ $(x = +\infty) \wedge (y = +\infty) \wedge (z = +\infty).$

`3.1:` Aus `2.8.Fall` folgt: $x = +\infty.$

`3.2:` Aus `2.8.Fall` folgt: $y = +\infty.$

`3.3:` Aus `2.8.Fall` folgt: $z = +\infty.$

`4:`
$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &\stackrel{3.1}{=} (+\infty) \cdot (y + z) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) + z) \\ &\stackrel{3.3}{=} (+\infty) \cdot ((+\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \\ &\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \\ &\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) + (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{3.1}{=} x \cdot (+\infty) + x \cdot (+\infty) \\ &\stackrel{3.2}{=} x \cdot y + x \cdot (+\infty) \stackrel{3.3}{=} x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

<u>Beweis</u> **118-2** `b)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **107-3**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via **107-3**: $z \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: y Zahl.

`2.3:` Aus `1.3`"$z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: z Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`3.2:` Aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot y = 0$.

`3.3:` Aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **FSA**0: $y + 0 = y$.

`3.4:` Aus `2.3`"z Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot z = 0$.

`3.5:` Aus `2.3`"z Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + z = 0$.

`3.6:` Aus `2.1`"x Zahl" und
aus `2.2`"y Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y$ Zahl.

`3.7:` Aus `2.1`"x Zahl" und
aus `2.3`"z Zahl"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot z$ Zahl.

`3.8:` Aus `2.2`"y Zahl" und
aus `2.3`"z Zahl"
folgt via $+$**SZ**: $y + z$ Zahl.

...

<u>Beweis **118-2**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

...

`4.1:` Aus `3.6`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $x \cdot y + 0 = x \cdot y$.

`4.2:` Aus `3.7`"$x \cdot z$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + x \cdot z = x \cdot z$.

`4.3:` Aus `3.8`"$y + z$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot (y + z) = 0$.

`5.1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`5.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < y) \vee (0 = y)$.

`5.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via **41-5**: $(0 < z) \vee (0 = z)$.

`6:` Aus `5.1`,
aus `5.2` und
aus `5.3`
folgt:

$$
\begin{array}{rl}
 & (0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z) \\
\vee & (0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 = z) \\
\vee & (0 < x) \wedge (0 = y) \wedge (0 < z) \\
\vee & (0 = x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z) \\
\vee & (0 < x) \wedge (0 = y) \wedge (0 = z) \\
\vee & (0 = x) \wedge (0 < y) \wedge (0 = z) \\
\vee & (0 = x) \wedge (0 = y) \wedge (0 < z) \\
\vee & (0 = x) \wedge (0 = y) \wedge (0 < z).
\end{array}
$$

`Fallunterscheidung`

`6.1.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z)$.

Aus `6.1.Fall`"$0 < x \ldots$",
aus `6.1.Fall`"$\ldots 0 < y \ldots$" und
aus `6.1.Fall`"$\ldots 0 < z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

Beweis **118-2** `b) VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.2.Fall` $(0 < x) \wedge (0 < y) \wedge (0 = z)$.

`7:` Aus `6.2.Fall` folgt: $0 = z$.

`8:` $x \cdot (y+z) \stackrel{7}{=} x \cdot (y+0) \stackrel{3.3}{=} x \cdot y \stackrel{4.1}{=} x \cdot y + 0 \stackrel{3.1}{=} x \cdot y + x \cdot 0 \stackrel{7}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8` folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`6.3.Fall` $(0 < x) \wedge (0 = y) \wedge (0 < z)$.

`7:` Aus `6.2.Fall` folgt: $0 = y$.

`8:` $x \cdot (y+z) \stackrel{7}{=} x \cdot (0+z) \stackrel{3.5}{=} x \cdot z \stackrel{4.2}{=} 0 + x \cdot z \stackrel{3.1}{=} x \cdot 0 + x \cdot z \stackrel{7}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8` folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`6.4.Fall` $(0 = x) \wedge (0 < y) \wedge (0 < z)$.

`7:` Aus `6.4.Fall` folgt: $0 = x$.

`8:` $x \cdot (y+z) \stackrel{7}{=} 0 \cdot (y+z) \stackrel{4.3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0+0 \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{3.4}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot z \stackrel{7}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8` folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **118-2**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.5.Fall` $(0 < x) \wedge (0 = y) \wedge (0 = z)$.

`7.1:` Aus `6.5.Fall`
folgt: $0 = y$.

`7.2:` Aus `6.5.Fall`
folgt: $0 = z$.

`8:` $x \cdot (y + z) \stackrel{7.1}{=} x \cdot (0 + z) \stackrel{7.2}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} x \cdot 0$
$\stackrel{3.1}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{3.1}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0 \stackrel{7.1}{=} x \cdot y + x \cdot 0 \stackrel{7.2}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`6.6.Fall` $(0 = x) \wedge (0 < y) \wedge (0 = z)$.

`7:` Aus `6.6.Fall`
folgt: $0 = x$.

`8:` $x \cdot (y + z) \stackrel{7}{=} 0 \cdot (y + z) \stackrel{4.3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{3.4}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot z \stackrel{7}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`6.7.Fall` $(0 = x) \wedge (0 = y) \wedge (0 < z)$.

`7:` Aus `6.7.Fall`
folgt: $0 = x$.

`8:` $x \cdot (y + z) \stackrel{7}{=} 0 \cdot (y + z) \stackrel{4.3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + 0 \stackrel{3.2}{=} 0 \cdot y + 0 \stackrel{3.4}{=} 0 \cdot y + 0 \cdot z \stackrel{7}{=} x \cdot y + x \cdot z$.

`9:` Aus `8`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

...

<u>Beweis **118-2**</u> `b)` `VS` gleich $(0 \le x) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z).$

...

`Fallunterscheidung`

...

`6.8.Fall` $(0 = x) \wedge (0 = y) \wedge (0 = z).$

`7:` Aus `6.8.Fall`
folgt: $0 = x.$

`8:` $x\cdot(y+z) \stackrel{7}{=} 0\cdot(y+z) \stackrel{4.3}{=} 0 \stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0+0 \stackrel{3.2}{=} 0\cdot y+0 \stackrel{3.4}{=} 0\cdot y+0\cdot z \stackrel{7}{=} x\cdot y+x\cdot z.$

`9:` Aus `8`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$

Beweis **118-2** `c)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \dots$"
folgt via **107-18**: $(x \leq 0) \vee (0 \leq x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq 0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -x$.

`3:` Aus `2`"$0 \leq -x$",
aus `VS` gleich "$\dots 0 \leq y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(-x) \cdot (y + z) = (-x) \cdot y + (-x) \cdot z$.

`4:`

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (y + z) \\
\stackrel{\mathbf{100-4}}{=}\; & -(-(x \cdot (y + z))) \\
\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\; & -(-x) \cdot (y + z) \\
\stackrel{\mathbf{3}}{=}\; & -((-x) \cdot y + (-x) \cdot z) \\
\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=}\; & -(-x) \cdot y - (-x) \cdot z \\
\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\; & -(-(x \cdot y)) - (-x) \cdot z \\
\stackrel{\mathbf{FS-\cdot}}{=}\; & -(-(x \cdot y)) - (-x \cdot z) \\
\stackrel{\mathbf{100-4}}{=}\; & x \cdot y - (-x \cdot z) \\
\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=}\; & x \cdot y + x \cdot z.
\end{aligned}
$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`1.2.Fall` $0 \leq x$.

Aus `1.2.Fall`"$0 \leq x$",
aus `VS` gleich "$\dots 0 \leq y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Beweis **118-2** `d)` `VS` gleich $(0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le y \dots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\dots 0 \le z$"
folgt via **107-3**: $z \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 \le y \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots 0 \le z$"
folgt via **FS**$\le +$: $0 \le y + z$.

`2.1:` Aus `1.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `2.1`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{nan} \cdot y \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{nan} \cdot z \in \mathbb{T}$.

`3.3:` Aus `2.1`"$y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.2`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $y + z \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `1.3`"$0 \le y + z$"
folgt via **41-5**: $(0 < y + z) \vee (0 = y + z)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

<u>Beweis **118-2**</u> `d)` `VS` gleich $(0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $0 < y + z$.

`5:` Aus `4.1.Fall`"$0 < y + z$"
folgt via **41-3**: $0 \neq y + z$.

`6:` Aus `5`"$0 \neq y + z$" und
aus `3.3`"$y + z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `VS` gleich "$0 \le y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le z$" und
aus `2.1.Fall`"$0 < y + z$"
folgt via **109-20**: $(0 < y) \vee (0 < z)$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $0 < y$.

`8:` Aus `7.1.Fall`"$0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq y$.

`9:` Aus `8`"$0 \neq y$" und
aus `2.1`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y = \mathsf{nan}$.

`10:` Aus `3.2`"$\mathsf{nan} \cdot z \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + \mathsf{nan} \cdot z = \mathsf{nan}$.

`11:`
$$\mathsf{nan} \cdot (y + z) \stackrel{6}{=} \mathsf{nan} \stackrel{10}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \cdot z \stackrel{9}{=} \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z.$$

`12:` Aus `11`
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$.

...

...

<u>Beweis **118-2**</u> `d) VS` gleich $(0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $0 < y + z$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`7.2.Fall` $0 < z$.

`8:` Aus `7.2.Fall`“$0 < z$”
folgt via **41-3**: $0 \neq z$.

`9:` Aus `8`“$0 \neq z$” und
aus `2.2`“$z \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot z = \mathsf{nan}$.

`10:` Aus `3.1`“$\mathsf{nan} \cdot y \in \mathbb{T}$”
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`11:`
$$\mathsf{nan} \cdot (y + z) \stackrel{6}{=} \mathsf{nan} \stackrel{10}{=} \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \stackrel{9}{=} \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z.$$

`12:` Aus `11`
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$.

...

<u>Beweis **118-2**</u> `d) VS` gleich $(0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $0 = y + z$.

`5:` Aus `4.2.Fall`“$0 = y + z$”
folgt: $y + z = 0$.

`6.1:` Aus `VS` gleich “$0 \leq y \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots 0 \leq z$” und
aus `5`“$y + z = 0$”
folgt via **109-20**: $y = 0$.

`6.2:` Aus `VS` gleich “$0 \leq y \ldots$”,
aus `VS` gleich “$\ldots 0 \leq z$” und
aus `5`“$y + z = 0$”
folgt via **109-20**: $z = 0$.

`7:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{nan} \cdot (y + z)\\
\stackrel{6.1}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot (0 + z)\\
\stackrel{6.2}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot (0 + 0)\\
\stackrel{\mathbf{98-10}}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot 0\\
\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\ &0\\
\stackrel{\mathbf{98-10}}{=}\ &0 + 0\\
\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot 0 + \mathsf{nan} \cdot 0\\
\stackrel{6.1}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot 0\\
\stackrel{6.2}{=}\ &\mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z.
\end{aligned}$$

`8:` Aus 7
folgt: $\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt:
$$\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z.$$

Beweis **118-2** `e)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{S}) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{S}$.

Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{S}$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`1.2.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$\mathsf{nan} \cdot (y + z) = \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z$.

`3:`
$$x \cdot (y + z) \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot (y + z) \stackrel{2}{=} \mathsf{nan} \cdot y + \mathsf{nan} \cdot z \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

<u>Beweis **118-2**</u> `f)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (0 \leq y) \wedge (0 \leq z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl. . . "
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \text{ Zahl})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$"
folgt via **107-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via **107-3**: $z \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$(\mathsf{Re}x) \cdot (y + z) = (\mathsf{Re}x) \cdot y + (\mathsf{Re}x) \cdot z$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T} \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq z$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`:
$(\mathsf{Im}x) \cdot (y + z) = (\mathsf{Im}x) \cdot y + (\mathsf{Im}x) \cdot z$.

`2.3:` Aus `1.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`2.4:` Aus `1.3`"$z \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z \in \mathbb{T}$.

`2.5:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Re}x$ Zahl. . . "
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Re}x) \cdot 0 = 0$.

`2.6:` Aus `1.1`"$\ldots \mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

`3.1:` Aus `2.3`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`3.2:` Aus `2.3`"$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}y = 0$.

`3.3:` Aus `2.4`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $z = \mathsf{Re}z$.

`3.4:` Aus `2.4`"$z \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}z = 0$.

. . .

<u>Beweis **118-2**</u> `f) VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

...

`4:`

$$x \cdot (y+z)$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot \mathsf{Re}(y+z) - (\mathsf{Im}x)\cdot \mathsf{Im}(y+z)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x)\cdot \mathsf{Re}(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}z)) - (\mathsf{Im}x)\cdot \mathsf{Im}(y+z)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot \mathsf{Im}(y+z) + (\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}z)) - (\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.1}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+(\mathsf{Re}z)) - (\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.3}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) - (\mathsf{Im}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z))) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot((\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}z)) + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.2}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(0+(\mathsf{Im}z)))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(0+(\mathsf{Im}z))+(\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.4}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) - (\mathsf{Im}x)\cdot(0+0)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot(0+0) + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) - (\mathsf{Im}x)\cdot 0) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.6}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) - 0) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}x)\cdot 0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.5}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) - 0) + \mathsf{i}\cdot(0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) + 0) + \mathsf{i}\cdot(0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) + \mathsf{i}\cdot(0 + (\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (\mathsf{Re}x)\cdot(y+z) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.1}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot y + (\mathsf{Re}x)\cdot z) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(y+z))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.2}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot y + (\mathsf{Re}x)\cdot z) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot y + (\mathsf{Im}x)\cdot z)$$

$$\stackrel{\mathsf{3.1}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x)\cdot z) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x)\cdot z)$$

$$\stackrel{\mathsf{3.3}}{=} ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)) + \mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))$$

...

<u>Beweis **118-2**</u> `f) VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

...

`4:` $x \cdot (y+z)$

$$= \ldots = ((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+0)+(\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)+0)) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)+0)) \\ +\mathsf{i}\cdot((0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-12}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)+0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)+0)) \\ +\mathsf{i}\cdot((0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)+0)) \\ +\mathsf{i}\cdot((0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-0)) \\ +\mathsf{i}\cdot((0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.6}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)) \\ +\mathsf{i}\cdot((0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+(0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))))$$

$$\stackrel{\mathsf{2.5}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.2}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot 0)) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.4}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}z))) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))))$$

$$\stackrel{\mathsf{3.2}}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}z))) \\ +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))))$$

...

<u>Beweis</u> **118-2** `f)` `VS` gleich $(x\ \text{Zahl}) \wedge (0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

...

`4:` $x \cdot (y+z)$

$$= \ldots = (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}z))) +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot 0+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z))))$$

$$\stackrel{3.4}{=} (((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}y)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}z))) +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x\cdot y)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Re}z)-(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Im}z))) +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x\cdot y)+\mathsf{Re}(x\cdot z)) +\mathsf{i}\cdot(((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}y)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}y))+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x\cdot y)+\mathsf{Re}(x\cdot z))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}(x\cdot y)+((\mathsf{Re}x)\cdot(\mathsf{Im}z)+(\mathsf{Im}x)\cdot(\mathsf{Re}z)))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} (\mathsf{Re}(x\cdot y)+\mathsf{Re}(x\cdot z))+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}(x\cdot y)+\mathsf{Im}(x\cdot z))$$

$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} x\cdot y+x\cdot z.$$

`5:` Aus `4` folgt: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z.$

□

118-3. Vorbereitend für Späteres - genauer gessagt, wird in der Masstheorie das **DistributivGesetz VZ** unter Nicht-Negativitäts-Bedingungen eingesetzt - wird nun **DGVZ** bewiesen:

118-3(Satz) (DGVZ: DistributivGesetze VZ)

a) *Aus* "$0 \leq y$" *und* "$0 \leq z$" *folgt* "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$".

b) *Aus* "$y \leq 0$" *und* "$z \leq 0$" *folgt* "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$".

RECH.$\leq$-**Notation**.

Beweis **118-3** `a)` `VS` gleich $(0 \le y) \wedge (0 \le z)$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall` "x Zahl",
aus `VS` gleich "$0 \le y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \le z$"
folgt via **118-2**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot (y + z) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$x \cdot (y + z) \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + x \cdot z \stackrel{2.2}{=} x \cdot y + x \cdot z.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

<u>Beweis **118-3**</u> `b)` `VS` gleich $(y \leq 0) \wedge (z \leq 0)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$y \leq 0 \ldots$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \leq 0$"
folgt via **109-16**: $0 \leq -z$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \leq -y$" und
aus `1.2`"$0 \leq -z$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$x \cdot ((-y)+(-z)) = x \cdot (-y) + x \cdot (-z).$$

`3:`
$$\begin{aligned} & x \cdot (y+z) \\ \overset{\mathbf{100-4}}{=} & -(-(x \cdot (y+z))) \\ \overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & -x \cdot (-(y+z)) \\ \overset{\mathbf{FS}-+}{=} & -x \cdot (-y-z) \\ = & -x \cdot ((-y)-z) \\ = & -x \cdot ((-y)+(-z)) \\ \overset{2}{=} & -(x \cdot (-y) + x \cdot (-z)) \\ \overset{\mathbf{FS}-\cdot}{=} & -((-x \cdot y) + (-x \cdot z)) \\ = & -(-x \cdot y + (-x \cdot z)) \\ = & -(-x \cdot y - x \cdot z) \\ \overset{\mathbf{FS}-+}{=} & x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

□

Einiges über $x + (+\infty)$ und über $x + (-\infty)$.

Ersterstellung: 16/01/10 **Letzte Änderung: 17/02/12**

119-1. Falls $x \in \mathbb{T}$, dann $(+\infty) + x = +\infty$ oder $(+\infty) + x = \mathsf{nan}$. Ähnlich folgt aus $x \in \mathbb{T}$ die Aussage $(-\infty) + x = -\infty$ oder $(-\infty) + x = \mathsf{nan}$:

119-1(Satz)

Es gelte:

→) $x \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) "$(+\infty) + x = +\infty$" *oder* "$(+\infty) + x = \mathsf{nan}$".

b) "$x + (+\infty) = +\infty$" *oder* "$x + (+\infty) = \mathsf{nan}$".

c) "$(-\infty) + x = -\infty$" *oder* "$(-\infty) + x = \mathsf{nan}$".

d) "$x + (-\infty) = -\infty$" *oder* "$x + (-\infty) = \mathsf{nan}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **119-1** a)

1: Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1.1.Fall "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + x = +\infty$.

3: Aus 2
folgt: $((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.2.Fall $x = \mathsf{nan}$.

2: $(+\infty) + x \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 3 "$(+\infty) + x = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.3.Fall $x = +\infty$.

2: $(+\infty) + x \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty$.

3: Aus 2 "$(+\infty) + x = \ldots = +\infty$"
folgt: $((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.4.Fall $x = -\infty$.

2: $(+\infty) + x \stackrel{\text{1.4.Fall}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 2 "$(+\infty) + x = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:
$((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$.

<u>Beweis **119-1** `b)`</u>

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan}).$$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $$(+\infty) + x = x + (+\infty).$$

`2:` Aus `1.1` "$((+\infty) + x = +\infty) \vee ((+\infty) + x = \mathsf{nan})$" und
aus `1.2` "$(+\infty) + x = x + (+\infty)$"
folgt: $$(x + (+\infty) = +\infty) \vee (x + (+\infty) = \mathsf{nan}).$$

Beweis **119-1** c)

1: Aus →) “$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = \mathsf{nan}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1.1.Fall “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + x = -\infty$.

3: Aus 2
folgt: $((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.2.Fall $x = \mathsf{nan}$.

2: $(-\infty) + x \overset{\text{1.2.Fall}}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 3 “$(-\infty) + x = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.3.Fall $x = +\infty$.

2: $(-\infty) + x \overset{\text{1.3.Fall}}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$.

3: Aus 2 “$(-\infty) + x = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$.

1.4.Fall $x = -\infty$.

2: $(-\infty) + x \overset{\text{1.4.Fall}}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty$.

3: Aus 2 “$(-\infty) + x = \ldots = -\infty$”
folgt: $((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt:
$((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$.

<u>Beweis **119-1** `d)`</u>

`1.1:` Aus →) "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:
$$((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan}).$$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $$(-\infty) + x = x + (-\infty).$$

`2:` Aus `1.1` "$((-\infty) + x = -\infty) \vee ((-\infty) + x = \mathsf{nan})$" und
aus `1.2` "$(-\infty) + x = x + (-\infty)$"
folgt: $$(x + (-\infty) = -\infty) \vee (x + (-\infty) = \mathsf{nan}).$$

□

119-2. Falls x Zahl, dann $\mathsf{Re}((+\infty)+x) = +\infty$ oder $\mathsf{Re}((+\infty)+x) = \mathsf{nan}$. Ähnlich folgt aus x Zahl die Aussage $\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty$ oder $\mathsf{Re}((-\infty)+x = \mathsf{nan})$. Dass beim ImaginärTeil die Dinge anders liegen, wird später thematisiert:

119-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ *x Zahl.*

Dann folgt:

a) "$\mathsf{Re}((+\infty)+x) = +\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}((+\infty)+x) = \mathsf{nan}$".

b) "$\mathsf{Re}(x+(+\infty)) = +\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(+\infty)) = \mathsf{nan}$".

c) "$\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}$".

d) "$\mathsf{Re}(x+(-\infty)) = -\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(-\infty)) = \mathsf{nan}$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **119-2**

`1.1:` Aus $\rightarrow)$"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow)$"x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **119-1**: $((+\infty)+(\mathsf{Re}x) = +\infty) \vee ((+\infty)+(\mathsf{Re}x) = \mathsf{nan})$.

`2.2:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **119-1**: $((\mathsf{Re}x)+(+\infty) = +\infty) \vee ((\mathsf{Re}x)+(+\infty) = \mathsf{nan})$.

`2.3:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **119-1**: $((-\infty)+(\mathsf{Re}x) = -\infty) \vee ((-\infty)+(\mathsf{Re}x) = \mathsf{nan})$.

`2.4:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **119-1**: $((\mathsf{Re}x)+(-\infty) = -\infty) \vee ((\mathsf{Re}x)+(-\infty) = \mathsf{nan})$.

...

<u>Beweis</u> **119-2** ...

`3.1:` $$\mathsf{Re}((+\infty)+x) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(+\infty)+(\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (+\infty)+(\mathsf{Re}x).$$

`3.2:` $$\mathsf{Re}(x+(+\infty)) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x)+\mathsf{Re}(+\infty) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (\mathsf{Re}x)+(+\infty).$$

`3.3:` $$\mathsf{Re}((-\infty)+x) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} \mathsf{Re}(-\infty)+(\mathsf{Re}x) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (-\infty)+(\mathsf{Re}x).$$

`3.4:` $$\mathsf{Re}(x+(-\infty)) \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} (\mathsf{Re}x)+\mathsf{Re}(-\infty) \stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (\mathsf{Re}x)+(-\infty).$$

`4.a):` Aus `2.1` “$((+\infty)+(\mathsf{Re}x)=+\infty)\vee((+\infty)+(\mathsf{Re}x)=\mathsf{nan})$” und
aus `3.1` “$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\ldots=(+\infty)+(\mathsf{Re}x)$”
folgt: $$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty)\vee(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}).$$

`4.b):` Aus `2.2` “$((\mathsf{Re}x)+(+\infty)=+\infty)\vee((\mathsf{Re}x)+(+\infty)=\mathsf{nan})$” und
aus `3.2` “$\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\ldots=(\mathsf{Re}x)+(+\infty)$”
folgt: $$(\mathsf{Re}(x+(+\infty))=+\infty)\vee(\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\mathsf{nan}).$$

`4.c):` Aus `2.3` “$((-\infty)+(\mathsf{Re}x)=-\infty)\vee((-\infty)+(\mathsf{Re}x)=\mathsf{nan})$” und
aus `3.3` “$\mathsf{Re}((-\infty)+x)=\ldots=(-\infty)+(\mathsf{Re}x)$”
folgt: $$(\mathsf{Re}((-\infty)+x)=-\infty)\vee(\mathsf{Re}((-\infty)+x)=\mathsf{nan}).$$

`4.d):` Aus `2.4` “$((\mathsf{Re}x)+(-\infty)=-\infty)\vee((\mathsf{Re}x)+(-\infty)=\mathsf{nan})$” und
aus `3.4` “$\mathsf{Re}(x+(-\infty))=\ldots=(\mathsf{Re}x)+(-\infty)$”
folgt: $$(\mathsf{Re}(x+(-\infty))=-\infty)\vee(\mathsf{Re}(x+(-\infty))=\mathsf{nan}).$$

□

119-3. Es gilt unter anderem $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty$ oder $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}$ oder $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}$:

119-3(Satz)

a) "$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}$".

b) "$\mathsf{Re}(x+(+\infty))=+\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\mathcal{U}$".

c) "$\mathsf{Re}((-\infty)+x)=-\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}((-\infty)+x)=\mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Re}((-\infty)+x)=\mathcal{U}$".

d) "$\mathsf{Re}(x+(-\infty))=-\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(-\infty))=\mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Re}(x+(-\infty))=\mathcal{U}$".

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **119-3** `a)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **119-2**:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}).$$

`3:` Aus 2
folgt:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}).$$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $(+\infty)+x=\mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Re}((+\infty)+x) \stackrel{2}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\ldots=\mathcal{U}$"
folgt:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}).$$

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}).$$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $(+\infty)+x=x+(+\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(\mathsf{Re}(x+(+\infty))=+\infty) \vee (\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}(x+(+\infty))=\mathcal{U}).$$

Beweis **119-3** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **119-2**:
$$(\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}).$$

`3:` Aus `2`
folgt:
$$(\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathcal{U}).$$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $(-\infty)+x = \mathcal{U}$.

`3:` $$\mathsf{Re}((-\infty)+x) \stackrel{2}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}.$$

`4:` Aus `3`"$\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \ldots = \mathcal{U}$"
folgt:
$$(\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathcal{U}).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$(\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathcal{U}).$$

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$(\mathsf{Re}((-\infty)+x) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \mathcal{U}).$$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $(-\infty)+x = x+(-\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:
$$(\mathsf{Re}(x+(-\infty)) = -\infty) \vee (\mathsf{Re}(x+(-\infty)) = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}(x+(-\infty)) = \mathcal{U}).$$

□

119-4. Es gilt unter anderem $(+\infty)+x\neq-\infty$. Ähnlich gilt unter anderem $(-\infty)+x\neq+\infty$:

119-4(Satz)

a) $(+\infty)+x\neq-\infty$.

b) $x+(+\infty)\neq-\infty$.

c) $(-\infty)+x\neq+\infty$.

d) $x+(-\infty)\neq+\infty$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **119-4**

`REIM`-**Notation**.

...

Beweis **119-4** ...

a)

1: Es gilt: $((+\infty)+x=-\infty)\vee((+\infty)+x\neq-\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(+\infty)+x=-\infty$.

2: $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\overset{\texttt{1.1.Fall}}{=}\mathsf{Re}(-\infty)\overset{\textbf{99-15}}{=}-\infty$.

3: Via **119-3** gilt:
$(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty)\vee(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan})$
$\vee(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U})$.

3.1.Fall $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty$.

4: Aus 2"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\ldots=-\infty$" und
aus 3.1.Fall"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=+\infty$" folgt:
$-\infty=+\infty$.

5: Es gilt 4"$-\infty=+\infty$".
Via **107-6** gilt "$-\infty\neq+\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(+\infty)+x\neq-\infty$.

3.2.Fall $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}$.

4: Aus 2"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\ldots=-\infty$" und
aus 3.2.Fall"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathsf{nan}$" folgt:
$-\infty=\mathsf{nan}$.

5: Es gilt 4"$-\infty=\mathsf{nan}$".
Via **AAI** gilt "$\mathsf{nan}\neq-\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $(+\infty)+x\neq-\infty$.

...

...

Beweis **119-4** `a)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $(+\infty)+x=-\infty.$

...

$\boxed{\texttt{3.3.Fall}}$ $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}.$

`4:` Aus `2`“$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\ldots=-\infty$” und
aus `3.3.Fall`“$\mathsf{Re}((+\infty)+x)=\mathcal{U}$” folgt:
$-\infty=\mathcal{U}.$

`5:` Aus **95-3**“$-\infty$ Menge” und
aus `5`“$-\infty=\mathcal{U}$”
folgt: $\mathcal{U}$ Menge.

`6:` Es gilt `5`“$\mathcal{U}$ Menge”.
Via **0$\mathcal{U}$Axiom** gilt “$\mathcal{U}$ Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $(+\infty)+x\neq-\infty.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(+\infty)+x\neq-\infty.$

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $(+\infty)+x\neq-\infty.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(+\infty)+x\neq-\infty.$

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(+\infty)+x\neq-\infty.$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $x+(+\infty)=(+\infty)+x.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $x+(+\infty)\neq-\infty.$

Beweis **119-4** `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(+\infty)+(-x)\neq-\infty.$

`2:` Aus `1` "$(+\infty)+(-x)\neq-\infty$"
folgt via **100-13**: $-((+\infty)+(-x))\neq+\infty.$

`3:` $(-\infty)+x\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=}-(-(-\infty)-x)=-((-(-\infty))-x)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}-((+\infty)-x)$
$=-((+\infty)+(-x)).$

`4:` Aus `3` "$(-\infty)+x=\ldots=-((+\infty)+(-x))$" und
aus `2` "$-((+\infty)+(-x))\neq+\infty$"
folgt: $(-\infty)+x\neq+\infty.$

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(-\infty)+x\neq+\infty.$

`1.2:` Via **FSA** gilt: $x+(-\infty)=(-\infty)+x.$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $x+(-\infty)\neq+\infty.$

$\square$

119-5. Es gilt unter anderem $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$. Ähnlich gilt unter anderem $\mathsf{Re}((-\infty)+x)\neq+\infty$:

119-5(Satz)

a) $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$.

b) $\mathsf{Re}(x+(+\infty))\neq-\infty$.

c) $\mathsf{Re}((-\infty)+x)\neq+\infty$.

d) $\mathsf{Re}(x+(-\infty))\neq+\infty$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **119-5** a)

1: Es gilt: $(\mathsf{Re}((+\infty)+x)=-\infty)\vee(\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}((+\infty)+x)=-\infty$.

2: Via **119-4** gilt: $(+\infty)+(\mathsf{Re}x)\neq-\infty$.

3: $-\infty\stackrel{\text{1.1.Fall}}{=}\mathsf{Re}((+\infty)+x)\stackrel{\mathbf{96-25}}{=}\mathsf{Re}(+\infty)+(\mathsf{Re}x)\stackrel{\mathbf{99-15}}{=}(+\infty)+(\mathsf{Re}x)$.

4: Es gilt 3"$-\infty=\ldots=(+\infty)+(\mathsf{Re}x)$".
Es gilt 2"$(+\infty)+(\mathsf{Re}x)\neq-\infty$".
Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$.

b)

1.1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$.

1.2: Via **FSA** gilt: $(+\infty)+x=x+(+\infty)$.

2: Aus 1.1"$\mathsf{Re}((+\infty)+x)\neq-\infty$" und
aus 1.2"$(+\infty)+x=x+(+\infty)$"
folgt: $\mathsf{Re}(x+(+\infty))\neq-\infty$.

Beweis **119-5** `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{Re}((+\infty)+(-x)) \neq -\infty$.

`2:` Aus `1`“ $\mathsf{Re}((+\infty)+(-x)) \neq -\infty$ ”
folgt via **100-13**: $-\mathsf{Re}((+\infty)+(-x)) \neq +\infty$.

`3:` $\mathsf{Re}((-\infty)+x) \stackrel{\textbf{FS}-+}{=} \mathsf{Re}(-(-(-\infty)-x)) \stackrel{\textbf{96-27}}{=}$
$-\mathsf{Re}(-(-\infty)-x) = -\mathsf{Re}((-(-\infty))-x) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} -\mathsf{Re}((+\infty)-x)$
$= -\mathsf{Re}((+\infty)+(-x))$.

`4:` Aus `3`“ $\mathsf{Re}((-\infty)+x) = \ldots = -\mathsf{Re}((+\infty)+(-x))$ ” und
aus `2`“ $-\mathsf{Re}((+\infty)+(-x)) \neq +\infty$ ”
folgt: $\mathsf{Re}((-\infty)+x) \neq +\infty$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{Re}((-\infty)+x) \neq +\infty$.

`1.2:` Via **FSA** gilt: $(-\infty)+x = x+(-\infty)$.

`2:` Aus `1.1`“ $\mathsf{Re}((-\infty)+x) \neq +\infty$ ” und
aus `1.2`“ $(-\infty)+x = x+(-\infty)$ ”
folgt: $\mathsf{Re}(x+(-\infty)) \neq +\infty$.

□

119-6. Die Diskussion von $\mathsf{Im}(x+(+\infty))$ und Ähnlichem gestaltet sich einfacher und direkter als die Diskussion von $\mathsf{Re}(x+(+\infty))$. Das liegt an $\mathsf{Im}(+\infty)=0$:

<u>**119-6(Satz)**</u>

a) $\mathsf{Im}(x+(+\infty))=\mathsf{Im}((+\infty)+x)=\mathsf{Im}x$.

b) $\mathsf{Im}(x+(-\infty))=\mathsf{Im}((-\infty)+x)=\mathsf{Im}x$.

c) "$\mathsf{Im}(x+(+\infty))\in\mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Im}(x+(+\infty))=\mathcal{U}$".

d) "$\mathsf{Im}((+\infty)+x)\in\mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Im}((+\infty)+x)=\mathcal{U}$".

e) "$\mathsf{Im}(x+(-\infty))\in\mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Im}(x+(-\infty))=\mathcal{U}$".

f) "$\mathsf{Im}((-\infty)+x)\in\mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Im}((-\infty)+x)=\mathcal{U}$".

<u>`REIM.RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **119-6**</u> a)

1: $$\mathsf{Im}(x+(+\infty))\stackrel{\mathbf{96-25}}{=}(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}(+\infty))\stackrel{\mathbf{99-15}}{=}(\mathsf{Im}x)+0\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\mathsf{Im}x.$$

2: $$\mathsf{Im}((+\infty)+x)\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}\mathsf{Im}(x+(+\infty)).$$

3: Aus 2"$\mathsf{Im}((+\infty)+x)=\ldots=\mathsf{Im}(x+(+\infty))$" und
aus 1"$\mathsf{Im}(x+(+\infty))=\ldots=\mathsf{Im}x$"
folgt: $$\mathsf{Im}(x+(+\infty))=\mathsf{Im}((+\infty)+x)=\mathsf{Im}x.$$

b)

1: $$\mathsf{Im}(x+(-\infty))\stackrel{\mathbf{96-25}}{=}(\mathsf{Im}x)+(\mathsf{Im}(-\infty))\stackrel{\mathbf{99-15}}{=}(\mathsf{Im}x)+0\stackrel{\mathbf{98-12}}{=}\mathsf{Im}x.$$

2: $$\mathsf{Im}((-\infty)+x)\stackrel{\mathbf{FSA}}{=}\mathsf{Im}(x+(-\infty)).$$

3: Aus 2"$\mathsf{Im}((-\infty)+x)=\ldots=\mathsf{Im}(x+(-\infty))$" und
aus 1"$\mathsf{Im}(x+(-\infty))=\ldots=\mathsf{Im}x$"
folgt: $$\mathsf{Im}(x+(-\infty))=\mathsf{Im}((-\infty)+x)=\mathsf{Im}x.$$

Beweis **119-6** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x + (+\infty)\ \text{Zahl}) \vee (x + (+\infty) \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x + (+\infty)$ Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x + (+\infty)$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x + (+\infty) \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x + (+\infty) \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U})$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$(\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U})$.

`2:` Via **FSA** gilt: $x + (+\infty) = (+\infty) + x$.

`3:` Aus `1`"$(\mathsf{Im}(x + (+\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x + (+\infty)) = \mathcal{U})$" und
aus `2`"$x + (+\infty) = (+\infty) + x$"
folgt: $(\mathsf{Im}((+\infty) + x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}((+\infty) + x) = \mathcal{U})$.

Beweis **119-6** `e)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x+(-\infty)\ \mathrm{Zahl}) \vee (x+(-\infty) \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x+(-\infty)$ Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x+(-\infty)$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x+(-\infty) \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x+(-\infty) \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U})$.

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt:
$(\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U})$.

`2:` Via **FSA** gilt: $x+(-\infty) = (-\infty)+x$.

`3:` Aus `1`"$(\mathsf{Im}(x+(-\infty)) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}(x+(-\infty)) = \mathcal{U})$" und
aus `2`"$x+(-\infty) = (-\infty)+x$"
folgt: $(\mathsf{Im}((-\infty)+x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Im}((-\infty)+x) = \mathcal{U})$.

□

Einiges über $x + y = \mathsf{nan}$ oder $+\infty$ oder $-\infty$.

Ersterstellung: 16/01/10 **Letzte Änderung: 17/02/12**

120-1. Falls $x+y=\mathsf{nan}$, dann gilt $x+y\in\mathbb{T}$ - woraus via **109-1** Weiteres folgt - und $\mathsf{Re}x=\mathsf{nan}$ oder $\mathsf{Re}y=\mathsf{nan}$ oder $\mathsf{Re}x=+\infty,\mathsf{Re}y=-\infty$ oder $\mathsf{Re}x=-\infty,\mathsf{Re}y=+\infty$:

120-1(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow)$ $x+y=\mathsf{nan}$.

Dann folgt:

a) $x+y\in\mathbb{T}$.

b) "$\mathsf{Re}x=\mathsf{nan}$" *oder* "$\mathsf{Re}y=\mathsf{nan}$"
oder "$(\mathsf{Re}x=+\infty)\wedge(\mathsf{Re}y=-\infty)$"
oder "$(\mathsf{Re}x=-\infty)\wedge(\mathsf{Re}y=+\infty)$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Weitere Folgerungen aus "$x+y\in\mathbb{T}$" sind in **109-1** zu finden.

Beweis **120-1** a)

Aus $\rightarrow)$"$x+y=\mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x+y\in\mathbb{T}$.

Beweis **120-1** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **95-15**: $(\alpha \in \mathbb{R}) \vee (\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty)$.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \beta \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **95-15**: $(\beta \in \mathbb{R}) \vee (\beta = +\infty) \vee (\beta = -\infty)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta = +\infty)\\
\vee\quad &(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta = -\infty)\\
\vee\quad &(\alpha = +\infty) \wedge (\beta \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(\alpha = +\infty) \wedge (\beta = +\infty)\\
\vee\quad &(\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)\\
\vee\quad &(\alpha = -\infty) \wedge (\beta \in \mathbb{R})\\
\vee\quad &(\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)\\
\vee\quad &(\alpha = -\infty) \wedge (\beta = -\infty).
\end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{3.1.Fall}}$ $(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.1.Fall`“$\alpha \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `3.1.Fall`“$\ldots \beta \in \mathbb{R}$”
folgt via $+$**SZ**: $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4`“$\alpha + \beta \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-17**: $\alpha + \beta \neq \mathsf{nan}$.

`6:` Es gilt `5`“$\alpha + \beta \neq \mathsf{nan}$”.
Es gilt `Thema1.1`“$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

...

...

Beweis **120-1** `b)` ...

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta = +\infty)$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$\alpha \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $\alpha + (+\infty) = +\infty$.

`5:` Aus `4`“$\alpha + (+\infty) = +\infty$” und
aus `3.2.Fall`“$\ldots \beta = +\infty$”
folgt: $\alpha + \beta = +\infty$.

`6:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq +\infty$” und
aus `5`“$\alpha + \beta = +\infty$”
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`“$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$”.
Es gilt `Thema1.1`“$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

`3.3.Fall` $(\alpha \in \mathbb{R}) \wedge (\beta = -\infty)$.

`4:` Aus `3.3.Fall`“$\alpha \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $\alpha + (-\infty) = -\infty$.

`5:` Aus `4`“$\alpha + (-\infty) = -\infty$” und
aus `3.3.Fall`“$\ldots \beta = -\infty$”
folgt: $\alpha + \beta = -\infty$.

`6:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq -\infty$” und
aus `5`“$\alpha + \beta = -\infty$”
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`“$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$”.
Es gilt `Thema1.1`“$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

...

...

Beweis **120-1** `b)` ...

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.4.Fall` $(\alpha = +\infty) \wedge (\beta \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.4.Fall`"$\ldots \beta \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + \beta = +\infty$.

`5:` Aus `3.4.Fall`"$\alpha = +\infty \ldots$" und
aus `4`"$(+\infty) + \beta = +\infty$"
folgt: $\alpha + \beta = +\infty$.

`6:` Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq +\infty$" und
aus `5`"$\alpha + \beta = +\infty$"
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`"$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$".
Es gilt `Thema1.1`"$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

`3.5.Fall` $(\alpha = +\infty) \wedge (\beta = +\infty)$.

`4:` Aus **AAVI**"$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$" und
aus `3.5.Fall`"$\alpha = +\infty \ldots$"
folgt: $\alpha + (+\infty) = +\infty$.

`5:` Aus `4`"$\alpha + (+\infty) = +\infty$" und
aus `3.5.Fall`"$\ldots \beta = +\infty$"
folgt: $\alpha + \beta = +\infty$.

`6:` Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq +\infty$" und
aus `5`"$\alpha + \beta = +\infty$"
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`"$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$".
Es gilt `Thema1.1`"$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$".
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

...

...

<u>Beweis</u> **120-1** `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{3.6.Fall}}$ $(\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)$.

Aus `3.6.Fall`
folgt:
$$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)).$$

$\boxed{\texttt{3.7.Fall}}$ $(\alpha = -\infty) \wedge (\beta \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.7.Fall`“$\ldots \beta \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + \beta = -\infty$.

`5:` Aus `3.7.Fall`“$\alpha = -\infty \ldots$” und
aus `4`“$(-\infty) + \beta = -\infty$”
folgt: $\alpha + \beta = -\infty$.

`6:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq -\infty$” und
aus `5`“$\alpha + \beta = -\infty$”
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`“$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$”.
Es gilt `Thema1.1`“$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)).$$

$\boxed{\texttt{3.8.Fall}}$ $(\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)$.

Aus `3.8.Fall`
folgt:
$$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)).$$

...

...

Beweis **120-1** `b)` ...

`Thema1.1` $(\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.9.Fall` $(\alpha = -\infty) \wedge (\beta = -\infty)$.

`4:` Aus **AAVI**“$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$” und
aus `3.9.Fall`“$\alpha = -\infty \ldots$”
folgt: $\alpha + (-\infty) = -\infty$.

`5:` Aus `4`“$\alpha + (-\infty) = -\infty$” und
aus `3.9.Fall`“$\ldots \beta = -\infty$”
folgt: $\alpha + \beta = -\infty$.

`6:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \neq -\infty$” und
aus `5`“$\alpha + \beta = -\infty$”
folgt: $\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$.

`7:` Es gilt `6`“$\mathsf{nan} \neq \alpha + \beta$”.
Es gilt `Thema1.1`“$\ldots \alpha + \beta = \mathsf{nan}$”.
Ex falso quodlibet folgt:
$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)).$$

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	“$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$ $\Rightarrow (((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)))$”

...

<u>Beweis</u> **120-1** `b)` ...

`1.2:` Aus →) “$x + y = \mathsf{nan}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.2`“$x + y \in \mathbb{T}$”
folgt via **109-1**: $(x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) \wedge (\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{T})$

`3.1:` Aus `2`“$x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \ldots$” und
aus →) “$x + y = \mathsf{nan}$”
folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots \mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}x = \mathsf{nan})$.

`3.3:` Aus `2`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{S}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

`5:` Aus `4.1.Fall`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$”,
aus `4.1.Fall`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$”,
aus `3.1`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = \mathsf{nan}$” und
aus `A1`“$\forall \alpha, \beta : (\alpha \in \mathbb{S}) \wedge (\beta \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha + \beta = \mathsf{nan})$
$\Rightarrow (((\alpha = +\infty) \wedge (\beta = -\infty)) \vee ((\alpha = -\infty) \wedge (\beta = +\infty)))$”
folgt:

$$((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty)) \vee ((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty)).$$

`6:` Aus `5`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty))\\
&\vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty)).
\end{aligned}$$

...

Beweis **120-1** `b)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{4.2.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})$.

Aus `4.2.Fall`

folgt: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty))$
$\vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty))$.

$\boxed{\texttt{4.3.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

Aus `4.3.Fall`

folgt: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty))$
$\vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty))$.

$\boxed{\texttt{4.4.Fall}}$ $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \wedge (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan})$.

Aus `4.3.Fall`

folgt: $(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty))$
$\vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty))$$
$$\vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty)).$$

$\square$

120-2. Falls $x + y = \mathsf{nan}$ mit $x \in \mathbb{T}$ oder $y \in \mathbb{T}$ dann gilt $x + y \in \mathbb{T}$ - woraus via **109-2** folgt, dass x, y treelle Zahlen sind - und $x = \mathsf{nan}$ oder $y = \mathsf{nan}$ oder $x = +\infty, y = -\infty$ oder $x = -\infty, y = +\infty$:

120-2(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x + y = \mathsf{nan}$.

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$. *oder* $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x + y \in \mathbb{T}$.

b) "$x = \mathsf{nan}$" *oder* "$y = \mathsf{nan}$" *oder* "$(x = +\infty) \wedge (y = -\infty)$" *oder* "$(x = -\infty) \wedge (y = +\infty)$".

RECH-**Notation**.

Beweis **120-2**

`REIM`-**Notation**.

`1.a)`: Aus →) "$x + y = \mathsf{nan}$"
folgt via **95-16**: $x + y \in \mathbb{T}$.

`2`: Aus `1.a)` "$x + y \in \mathbb{T}$" und
aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-2**: $(x \in \mathbb{T}) \wedge (y \in \mathbb{T})$.

`3.1`: Aus `2` "$x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`3.2`: Aus `2` "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`4`: Aus →) "$x + y = \mathsf{nan}$"
folgt via **120-1**:

$$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty)) \\ \vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty)).$$

`5`: Aus `3.1` "$x = \mathsf{Re}x$" und
aus `4` "$(\mathsf{Re}x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((\mathsf{Re}x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty)) \vee((\mathsf{Re}x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty))$"
folgt:

$$(x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty)) \\ \vee((x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty)).$$

`6`: Aus `3.2` "$y = \mathsf{Re}y$" und
aus `5` "$(x = \mathsf{nan}) \vee (\mathsf{Re}y = \mathsf{nan}) \vee ((x = +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = -\infty)) \vee((x = -\infty) \wedge (\mathsf{Re}y = +\infty))$"
folgt:

$$(x = \mathsf{nan}) \vee (y = \mathsf{nan}) \vee ((x = +\infty) \wedge (y = -\infty)) \\ \vee((x = -\infty) \wedge (y = +\infty)).$$

□

120-3. Falls $x+y=+\infty$, dann gilt unter anderem $x+y\in\mathbb{S}$ - woraus via **109-3** Weiteres folgt - und $\mathsf{Re}x$ oder $\mathsf{Re}y$ sind gleich $+\infty$:

120-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y=+\infty$.

Dann folgt:

a) $x+y\in\mathbb{S}$.

b) $\mathsf{Re}x\neq-\infty$.

c) $\mathsf{Re}y\neq-\infty$.

d) "$\mathsf{Re}x=+\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}y=+\infty$".

e) "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}x=+\infty$".

f) "$\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}y=+\infty$".

REIM.RECH-**Notation**.

Weitere Folgerungen aus "$x+y\in\mathbb{S}$" sind in **109-3** zu finden.

Beweis **120-3** a)

Aus $\rightarrow$)"$x+y=+\infty$"
folgt via **95-15**: $x+y\in\mathbb{S}$.

Beweis **120-3** `b)`

`1:` Aus →) "$x + y = +\infty$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x + y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$x + y \in \mathbb{S}$" folgt via **109-3**: $x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`3:` Aus →) "$x + y = +\infty$" und aus `2` "$x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$" folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = +\infty$.

`4:` Es gilt: $(\mathsf{Re}x = -\infty) \vee (\mathsf{Re}x \neq -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`5:` Via **119-4** gilt: $(-\infty) + (\mathsf{Re}y) \neq +\infty$.

`6:` Aus `4.1.Fall` "$\mathsf{Re}x = -\infty$" und aus `5` "$(-\infty) + (\mathsf{Re}y) \neq +\infty$" folgt: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \neq +\infty$.

`7:` Es gilt `6` "$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \neq +\infty$". Es gilt `3` "$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = +\infty$." Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

`4.2.Fall` $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

`c)`

`1:` Via **FSA** gilt: $y + x = x + y$.

`2:` Aus `1` "$y + x = x + y$" und aus →) "$x + y = +\infty$" folgt: $y + x = +\infty$.

`3:` Aus `2` "$y + x = +\infty$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{Re}y \neq -\infty$.

<u>Beweis **120-3**</u> `d)`

`1.1:` Aus →) “$x + y = +\infty$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x + y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus →) “$x + y = +\infty$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

`1.3:` Aus →) “$x + y = +\infty$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{Re}y \neq -\infty$.

`2.1:` Aus `1.1`“$x + y \in \mathbb{S}$”
folgt via **109-3**: $x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

`2.2:` Aus `1.1`“$x + y \in \mathbb{S}$”
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Re}y \in \mathbb{S})$.

`3:` Es gilt: $(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$
$\vee \quad (\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

...

Beweis **120-3** `d)`

...

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(\mathsf{Re}x \neq +\infty) \wedge (\mathsf{Re}y \neq +\infty)$.

`4.1:` Aus `2.2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`4.2:` Aus `2.2`“$\ldots \mathsf{Re}y \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`5.1:` Aus `4.1`“$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$”,
aus **`3.1.Fall`**“$\mathsf{Re}x \neq +\infty \ldots$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Re}x \neq -\infty$”
folgt: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`5.2:` Aus `4.2`“$(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$”,
aus **`3.1.Fall`**“$\ldots \mathsf{Re}y \neq +\infty$” und
aus `1.3`“$\mathsf{Re}y \neq -\infty$”
folgt: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5.1`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$” und
aus `5.2`“$\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$”
folgt via +**SZ**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$.

`7:` Aus `2.1`“$x + y = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$” und
aus `6`“$(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) \in \mathbb{R}$”
folgt: $x + y \in \mathbb{R}$.

`8:` Aus →)“$x + y = +\infty$”
folgt via **95-18**: $x + y \notin \mathbb{R}$.

`9:` Es gilt `7`“$x + y \in \mathbb{R}$”.
Es gilt `8`“$x + y \notin \mathbb{R}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $(\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`3.2.Fall` $(\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

<u>Beweis</u> **120-3** `ef)`

`1.1:` Aus →) “ $x+y=+\infty$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x+y\in\mathbb{S}$.

`1.2:` Aus →) “ $x+y=+\infty$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{Re}x\neq-\infty$.

`1.3:` Aus →) “ $x+y=+\infty$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{Re}y\neq-\infty$.

`2:` Aus `1.1` “ $x+y\in\mathbb{S}$ ”
folgt via **109-3**: $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{S})\wedge(\mathsf{Re}y\in\mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2` “ $\mathsf{Re}x\in\mathbb{S}\ldots$ ”
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}x=+\infty)\vee(\mathsf{Re}x=-\infty)$.

`3.2:` Aus `2` “ $\ldots\mathsf{Re}y\in\mathbb{S}$ ”
folgt via **95-15**: $(\mathsf{Re}y\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}y=+\infty)\vee(\mathsf{Re}y=-\infty)$.

`4.e):` Aus `3.1` “ $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}x=+\infty)\vee(\mathsf{Re}x=-\infty)$ ” und
aus `1.2` “ $\mathsf{Re}x\neq-\infty$ ”
folgt: $(\mathsf{Re}x\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}x=+\infty)$.

`4.f):` Aus `3.2` “ $(\mathsf{Re}y\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}y=+\infty)\vee(\mathsf{Re}y=-\infty)$ ” und
aus `1.3` “ $\mathsf{Re}y\neq-\infty$ ”
folgt: $(\mathsf{Re}y\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}y=+\infty)$.

□

120-4. Falls $x+y=+\infty$ und $x\in\mathbb{T}$ oder $y\in\mathbb{T}$ dann gilt unter anderem $x+y\in\mathbb{S}$ - woraus via **109-4** Weiteres folgt - und x oder y sind gleich $+\infty$:

120-4(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y=+\infty$.

$\rightarrow$) $x\in\mathbb{T}$. *oder* $y\in\mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x+y\in\mathbb{S}$.

b) $x\neq-\infty$.

c) $y\neq-\infty$.

d) "$x=+\infty$" *oder* "$y=+\infty$".

e) "$x\in\mathbb{R}$" *oder* "$x=+\infty$".

f) "$y\in\mathbb{R}$" *oder* "$y=+\infty$".

RECH-**Notation**.

Weitere Folgerungen aus "$x+y\in\mathbb{S}$" mit "$(x\in\mathbb{T})\vee(y\in\mathbb{T})$" sind in **109-4** zu finden.

Beweis **120-4**

REIM-**Notation**.

1.a): Aus $\rightarrow$) "$x+y=+\infty$"
folgt via **95-15**: $x+y\in\mathbb{S}$.

...

<u>Beweis</u> **120-4** . . .

`1.1:` Aus →) “$x+y=+\infty$”
folgt via **120-3**: $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

`1.2:` Aus →) “$x+y=+\infty$”
folgt via **120-3**: $\mathsf{Re}y \neq -\infty$.

`1.3:` Aus →) “$x+y=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`1.4:` Aus →) “$x+y=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = +\infty)$.

`1.5:` Aus →) “$x+y=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`2:` Aus `1.a)` “$x+y \in \mathbb{S}$” und
aus →) “$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$”
folgt via **109-4**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2`“$x \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2`“$\ldots y \in \mathbb{S}$”
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3.1`“$x \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x = \mathsf{Re}x$.

`4.2:` Aus `3.2`“$y \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y = \mathsf{Re}y$.

`5.b):` Aus `4.1`“$x = \mathsf{Re}x$” und
aus `1.1`“$\mathsf{Re}x \neq -\infty$”
folgt: $x \neq -\infty$.

`5.c):` Aus `4.2`“$y = \mathsf{Re}y$” und
aus `1.2`“$\mathsf{Re}y \neq -\infty$”
folgt: $y \neq -\infty$.

`5.1:` Aus `4.1`“$x = \mathsf{Re}x$” und
aus `1.3`“$(\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$”
folgt: $(x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$.

. . .

Beweis **120-4** . . .

`6.d):` Aus `4.2`“$y = \mathsf{Re}y$” und
aus `5.1`“$(x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$”
folgt: $(x = +\infty) \vee (y = +\infty)$.

`6.e):` Aus `4.1`“$x = \mathsf{Re}x$” und
aus `1.4`“$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = +\infty)$”
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`6.f):` Aus `4.2`“$y = \mathsf{Re}y$” und
aus `1.5`“$(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = +\infty)$”
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

$\square$

120-5. Falls $x+y=-\infty$, dann gilt unter anderem $x+y\in\mathbb{S}$ - woraus via **109-3** Weiteres folgt - und $\mathsf{Re}x$ oder $\mathsf{Re}y$ sind gleich $-\infty$:

<u>120-5(Satz)</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y=-\infty$.

Dann folgt:

a) $x+y\in\mathbb{S}$.

b) $\mathsf{Re}x\neq+\infty$.

c) $\mathsf{Re}y\neq+\infty$.

d) "$\mathsf{Re}x=-\infty$" *oder* "$\mathsf{Re}y=-\infty$".

e) "$\mathsf{Re}x\in\mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}x=-\infty$".

f) "$\mathsf{Re}y\in\mathbb{R}$" *oder* "$\mathsf{Re}y=-\infty$".

<u>REIM.RECH-**Notation**</u>.

Weitere Folgerungen aus "$x+y\in\mathbb{S}$" sind in **109-3** zu finden.

<u>Beweis **120-5**</u> a)

Aus $\rightarrow$) "$x+y=-\infty$"
folgt via **95-15**: $x+y\in\mathbb{S}$.

<u>Beweis **120-5** `bcdef)`</u>

`1:` $(-x)+(-y)=(-x)-y=-x-y\stackrel{\textbf{FS}-+}{=}-(x+y)\stackrel{\to)}{=}-(-\infty)\stackrel{\textbf{AAVI}}{=}+\infty.$

`2.1:` Aus `1`“$(-x)+(-y)=\ldots=+\infty$”
folgt via **120-3**: $\mathsf{Re}(-x)\neq-\infty.$

`2.2:` Aus `1`“$(-x)+(-y)=\ldots=+\infty$”
folgt via **120-3**: $\mathsf{Re}(-y)\neq-\infty.$

`2.3:` Aus `1`“$(-x)+(-y)=\ldots=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}(-x)=+\infty)\vee(\mathsf{Re}(-y)=+\infty).$

`2.4:` Aus `1`“$(-x)+(-y)=\ldots=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}(-x)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(-x)=+\infty).$

`2.5:` Aus `1`“$(-x)+(-y)=\ldots=+\infty$”
folgt via **120-3**: $(\mathsf{Re}(-y)\in\mathbb{R})\vee(\mathsf{Re}(-y)=+\infty).$

`3.1:` Via **96-27** gilt: $\mathsf{Re}(-x)=-\mathsf{Re}x.$

`3.2:` Via **96-27** gilt: $\mathsf{Re}(-y)=-\mathsf{Re}y.$

`4.1:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(-x)=-\mathsf{Re}x$” und
aus `2.1`“$\mathsf{Re}(-x)\neq-\infty$”
folgt: $-\mathsf{Re}x\neq-\infty.$

`4.2:` Aus `3.2`“$\mathsf{Re}(-y)=-\mathsf{Re}y$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Re}(-y)\neq-\infty$”
folgt: $-\mathsf{Re}y\neq-\infty.$

`4.3:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(-x)=-\mathsf{Re}x$” und
aus `2.3`“$(\mathsf{Re}(-x)=+\infty)\vee(\mathsf{Re}(-y)=+\infty)$”
folgt: $(-\mathsf{Re}x=+\infty)\vee(\mathsf{Re}(-y)=+\infty).$

...

<u>Beweis **120-5**</u> `bcdef)` ...

`4.4:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$” und
aus `2.4`“$(\mathsf{Re}(-x) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(-x) = +\infty)$”
folgt: $(-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (-\mathsf{Re}x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`4.4.1.Fall` $-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.4.1.Fall`“$-\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$”
folgt via **117-4**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`4.4.2.Fall` $-\mathsf{Re}x = +\infty$.

`5:` Aus `4.4.2.Fall`“$-\mathsf{Re}x = +\infty$”
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$”

...

Beweis **120-5** `bcdef)` ...

`4.5:` Aus `3.2` "$\mathsf{Re}(-y) = -\mathsf{Re}y$" und
aus `2.5` "$(\mathsf{Re}(-y) \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}(-y) = +\infty)$"
folgt: $(-\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (-\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`4.5.1.Fall` $-\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.5.1.Fall` "$-\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$"
folgt via **117-4**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`4.5.2.Fall` $-\mathsf{Re}y = +\infty$.

`5:` Aus `4.5.2.Fall` "$-\mathsf{Re}y = +\infty$"
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}y = -\infty$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A2` "$(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty))$"

`5.b):` Aus `4.1` "$-\mathsf{Re}x \neq -\infty$"
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}x \neq +\infty$.

`5.c):` Aus `4.2` "$-\mathsf{Re}y \neq -\infty$"
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}y \neq +\infty$.

...

<u>Beweis **120-5**</u> `bcdef)` ...

`5.1:` Aus `3.2`“$\mathsf{Re}(-y) = -\mathsf{Re}y$” und
aus `4.3`“$(-\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (\mathsf{Re}(-y) = +\infty)$”
folgt: $(-\mathsf{Re}x = +\infty) \vee (-\mathsf{Re}y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.1.Fall` $-\mathsf{Re}x = +\infty$.

`6:` Aus `5.1.1.Fall`“$-\mathsf{Re}x = +\infty$”
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}x = -\infty$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\mathsf{Re}x = -\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`5.1.2.Fall` $-\mathsf{Re}y = +\infty$.

`6:` Aus `5.1.1.Fall`“$-\mathsf{Re}y = +\infty$”
folgt via **100-13**: $\mathsf{Re}y = -\infty$.

`7:` Aus `6`
folgt: $(\mathsf{Re}x = -\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A3` | “$(\mathsf{Re}x = -\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$”

`6.d):` Aus `A3`
folgt: $(\mathsf{Re}x = -\infty) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

`6.e):` Aus `A1`
folgt: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x = -\infty)$.

`6.f):` Aus `A2`
folgt: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y = -\infty)$.

□

120-6. Falls $x+y=-\infty$ und $x \in \mathbb{T}$ oder $y \in \mathbb{T}$ dann gilt unter anderem $x+y \in \mathbb{S}$ - woraus via **109-4** Weiteres folgt - und x oder y sind gleich $-\infty$:

120-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x+y=-\infty$.

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{T}$. *oder* $y \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x+y \in \mathbb{S}$.

b) $x \neq +\infty$.

c) $y \neq +\infty$.

d) "$x=-\infty$" *oder* "$y=-\infty$".

e) "$x \in \mathbb{R}$" *oder* "$x=-\infty$".

f) "$y \in \mathbb{R}$" *oder* "$y=-\infty$".

RECH-**Notation**.

Weitere Folgerungen aus "$x+y \in \mathbb{S}$" mit "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$" sind in **109-4** zu finden.

Beweis **120-6**

REIM-**Notation**.

1.a): Aus $\rightarrow$) "$x+y=-\infty$"
folgt via **95-15**: $x+y \in \mathbb{S}$.

...

<u>Beweis</u> **120-6** ...

`1.1:` Aus →) "$x+y=-\infty$"
folgt via **120-5**: $\mathsf{Re}x \neq +\infty$.

`1.2:` Aus →) "$x+y=-\infty$"
folgt via **120-5**: $\mathsf{Re}y \neq +\infty$.

`1.3:` Aus →) "$x+y=-\infty$"
folgt via **120-5**: $(\mathsf{Re}x=-\infty) \vee (\mathsf{Re}y=-\infty)$.

`1.4:` Aus →) "$x+y=-\infty$"
folgt via **120-5**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}x=-\infty)$.

`1.5:` Aus →) "$x+y=-\infty$"
folgt via **120-5**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re}y=-\infty)$.

`2:` Aus `1.a)` "$x+y \in \mathbb{S}$" und
aus →) "$(x \in \mathbb{T}) \vee (y \in \mathbb{T})$"
folgt via **109-4**: $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2` "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via $\in$**SZ**: $x \in \mathbb{T}$.

`3.2:` Aus `2` "$\ldots y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $y \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3.1` "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $x=\mathsf{Re}x$.

`4.2:` Aus `3.2` "$y \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $y=\mathsf{Re}y$.

`5.b):` Aus `4.1` "$x=\mathsf{Re}x$" und
aus `1.1` "$\mathsf{Re}x \neq +\infty$"
folgt: $x \neq +\infty$.

`5.c):` Aus `4.2` "$y=\mathsf{Re}y$" und
aus `1.2` "$\mathsf{Re}y \neq +\infty$"
folgt: $y \neq +\infty$.

`5.1:` Aus `4.1` "$x=\mathsf{Re}x$" und
aus `1.3` "$(\mathsf{Re}x=-\infty) \vee (\mathsf{Re}y=-\infty)$"
folgt: $(x=-\infty) \vee (\mathsf{Re}y=-\infty)$.

...

<u>Beweis</u> **120-6** ...

`6.d)`: Aus `4.2`“$y = \mathsf{Re} y$” und
aus `5.1`“$(x = -\infty) \vee (\mathsf{Re} y = -\infty)$”
folgt: $(x = -\infty) \vee (y = -\infty)$.

`6.e)`: Aus `4.1`“$x = \mathsf{Re} x$” und
aus `1.4`“$(\mathsf{Re} x \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re} x = -\infty)$”
folgt: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`6.f)`: Aus `4.2`“$y = \mathsf{Re} y$” und
aus `1.5`“$(\mathsf{Re} y \in \mathbb{R}) \vee (\mathsf{Re} y = -\infty)$”
folgt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = -\infty)$.

$\square$

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).